МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2009

УДК 533.6.013.42

© 2009 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ФЛАТТЕРА ПЛАСТИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЧНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В классических исследованиях панельного флаттера обычно используется предположение о том, что давление газа, действующее на пластину, может быть рассчитано с помощью поршневой теории – приближения точной при больших числах Маха. Потеря устойчивости, обнаруживаемая в этих исследованиях, имеет "связанный" тип, когда происходит взаимодействие двух мод колебаний. Недавно с помощью асимптотических методов был обнаружен другой тип потери устойчивости – одномодовый, который не может быть получен при использовании поршневой теории. В настоящей работе этот тип потери устойчивости исследуется численно с помощью метода Бубнова–Галеркина.

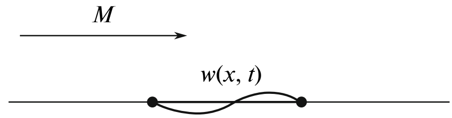
Ключевые слова: панельный флаттер, флаттер пластины, высокочастотный флаттер, одномодовый флаттер, флаттер с одной степенью свободы.

Изучению панельного флаттера – колебательной потери устойчивости панелей обшивки летательных аппаратов, представляющих собой плоские пластины или пологие оболочки, – посвящено огромное количество работ (например, [1–6]). В подавляющем большинстве работ используется "поршневая теория", – приближение точного выражения для давления, действующего на колеблющуюся пластину, при больших числах Маха. При этом все усложнения, такие как нелинейность, неоднородность, сложная геометрия пластины в плане, обычно вводятся только в "упругую" часть задачи.

При сравнении результатов расчетов по поршневой теории с экспериментами обнаруживается очень хорошее совпадение при числах Маха, превышающих 1.7 [1]. При уменьшении числа Маха различие между теорией и экспериментом сильно увеличивается. Для объяснения этого эффекта высказывались различные предположения [3, 4], в частности потеря точности поршневой теории и возникновение "флаттера с одной степенью свободы" [7], или одномодового флаттера, когда потеря устойчивости происходит по одной моде колебаний без взаимодействия между модами (в отличие от того, что получается при исследовании по поршневой теории [8, 9]). Однако, несмотря на отдельные работы [10–12], систематического изучения панельного флаттера при низких сверхвуковых числах Маха в литературе нет.

Недавно с помощью асимптотических методов одномодовый флаттер был обнаружен аналитически (в этих работах он назван "высокочастотным флаттером") [13–15], поэтому интересно исследовать возможность возникновения этого типа флаттера численно, с использованием точной аэродинамической теории при низких сверхзвуковых числах Маха, когда поршневая теория неприменима.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская упругая пластина, обтекаемая с одной стороны плоскопараллельным сверхзвуковым потоком невязкого совершенного газа. С другой стороны к пластине приложено постоянное давление, уравновешивающее ее (фиг. 1). Пластина вмонтирована в абсолютно жесткую плоскость, отделяющую поток газа от области постоянного давления.



Фиг. 1. Общий вид рассматриваемой системы

Задачу будем рассматривать в двумерной постановке, пластину – считать имеющей в плане форму полосы, натекание – перпендикулярным кромкам. Предположим, что пластина совершает колебательное движение с прогибом $w(x,t) = W(x)e^{-i\omega t}$, ω – комплексная частота (прогиб считается отнесенным к толщине). Тогда безразмерное уравнение движения пластины в потоке газа записывается так:

$$D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \omega^2 W + p\{W,\omega\} = 0 \tag{1.1}$$

Давление $p\{W,\omega\}$ найденное из линеаризованной теории потенциального течения газа, имеет вид [1, § 4.7]

$$p\{W,\omega\} = \frac{\mu}{\sqrt{M^2-1}}\left(-i\omega + M\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_0^x\left(-i\omega W(\xi) + \right.$$
$$\left. + M\frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi}\right)\exp\left(\frac{iM\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right)J_0\left(\frac{-\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right)d\xi$$

или, преобразуя

$$p\{W,\omega\} = \frac{\mu M}{\sqrt{M^2-1}}\left(-i\omega W(x) + M\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right) +$$
$$+\frac{\mu\omega}{(M^2-1)^{2/3}}\int_0^x\left(-i\omega W(\xi) + M\frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi}\right)\times \tag{1.2}$$
$$\times\exp\left(\frac{iM\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right)\left(iJ_0\left(\frac{-\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right) + MJ_1\left(\frac{-\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right)\right)d\xi$$

Безразмерные параметры выражаются через размерные так:

$$D = \frac{E}{12(1-\nu^2)a^2\rho_m}, \quad L = \frac{L_w}{h}, \quad M = \frac{u}{a}, \quad \mu = \frac{\rho}{\rho_m}$$

Здесь E, ν, ρ_m – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины, L_w и h – ее ширина и толщина, u, ρ и a – скорость, плотность и скорость звука газа. Параметры D и L – это безразмерная жесткость и ширина пластины, M и μ – число Маха и безразмерная плотность газа.

Пластина занимает область $0 \le x \le L$, на кромках заданы условия шарнирного опирания

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \qquad x = 0, \quad x = L \tag{1.3}$$

Задача (1.1)–(1.3) представляет собой задачу на собственные значения относительно комплексной частоты ω. Система неустойчива в том и только в том случае, когда хотя бы одна из собственных частот ω_n лежит в верхней полуплоскости комплексной плоскости: $\operatorname{Im}\omega_n > 0$.

В дальнейшем для сравнения с точным выражением для давления (1.2) вычисления будут проводиться и по поршневой теории, которая имеет вид

$$p\{W,\omega\} = \frac{\mu M}{\sqrt{M^2-1}}\left(-i\omega W(x) + M\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right) \tag{1.4}$$

и, как видно, получается из точного выражения (1.2) отбрасыванием интегрального слагаемого.

2. Численный метод. Задачу на собственные значения будем решать методом Бубнова–Галеркина. В качестве базисных функций выберем формы колебаний пластины в вакууме и представим приближенное решение в виде

$$W(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n W_n(x), \quad W_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Здесь C_n – неизвестные постоянные коэффициенты. Подставляя это выражение в (1.1), умножая последовательно на $W_m(x)$, $m = 1\ldots N$ и интегрируя от 0 до L, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно C_n с матрицей

$$\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{K} + \mathbf{P}(\omega) - \frac{L\omega^2}{2}\mathbf{I}$$

Здесь $\mathbf{K}$ – диагональная матрица жесткости с коэффициентами $k_{jj} = D(j\pi/L)^4(L/2)$, $k_{jn} = 0$, $j \neq n$, $\mathbf{P}$ – матрица аэродинамических сил с коэффициентами

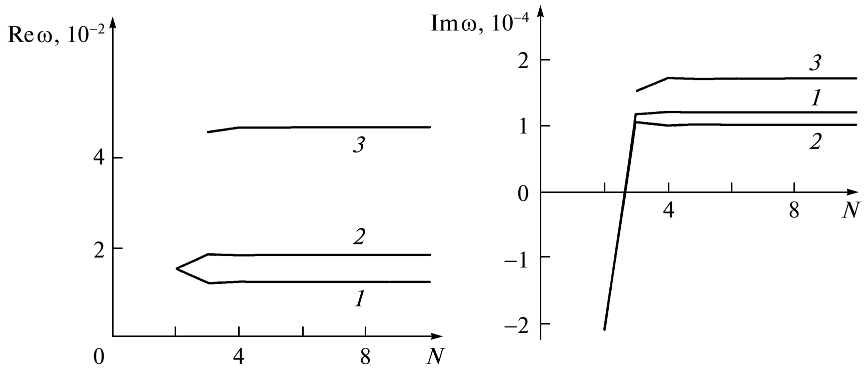
$$p_{jn}(\omega) = \int_0^L P\{W_n,\omega\}\cdot W_j\,dx \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Уравнение для определения собственных значений имеет вид

$$\det\mathbf{A}(\omega) = \det\left(\mathbf{K} + \mathbf{P}(\omega) - \frac{L\omega^2}{2}\mathbf{I}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Матрица $\mathbf{P}(\omega)$ является комплексной, несимметричной, и все ее коэффициенты отличны от нуля. Следовательно, задача на собственные значения не является самосопряженной, а собственные частоты – решения (2.2) – являются комплексными.

Для численного решения уравнения (2.2) воспользуемся простейшим итерационным методом. Пусть нужно вычислить n-ю собственную частоту ω_n. В качестве начального значения возьмем значение n-й собственной частоты колебаний пластины в вакууме $\omega_{0n} = \sqrt{D}(n\pi/L)^2$. Далее, пусть имеется p-е приближение ω_n^p. Составим матрицу $\mathbf{A}_{p+1}(\omega_n^p, \omega_n^{p+1})$ так, чтобы ω_n^{p+1} входило в нее простейшим образом. Все ее коэф-



Фиг. 2. Сходимость итераций по ω при увеличении числа базисных функций, $n = 1$, 2, 3 – номера мод; $D = 23.9$, $M = 1.2$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $L = 300$

фициенты a_{jk}, за исключением a_{nn}, возьмем такими же, как у матрицы $\mathbf{A}(\omega_n^p)$. Коэффициент a_{nn} вычислим по формуле

$$a_{nn} = k_{nn} + p_{nn}(\omega_n^p) - \frac{L(\omega_n^{p+1})^2}{2}$$

где k_{nn} и p_{nn} – соответствующие коэффициенты матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{P}$. Уравнением для вычисления $p+1$-го приближения ω_n^{p+1} является

$$\det \mathbf{A}_{p+1}(\omega_n^p, \omega_n^{p+1}) = 0$$

Оно, очевидно, линейно относительно $(\omega_n^{p+1})^2$. Из двух значений ω_n^{p+1} берется лежащее в правой полуплоскости комплексной плоскости: $\mathrm{Re}\,\omega_n^{p+1} > 0$.

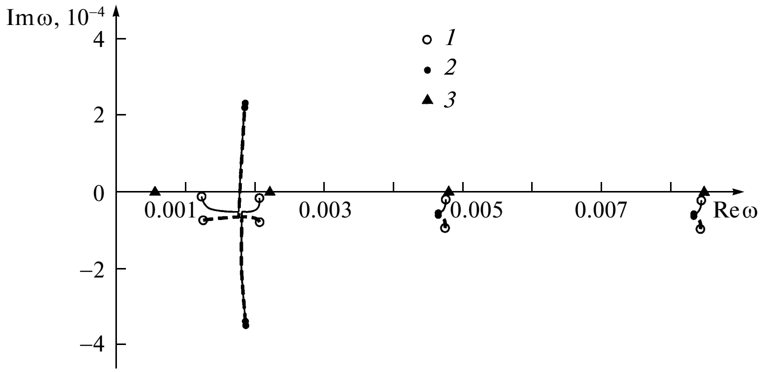
Итерации для вычисления ω_n продолжаются, пока не выполнено условие

$$\frac{\omega_n^p - \omega_n^{p-1}}{\omega_n^p} < \varepsilon_1$$

После достижения сходимости проверяется выполнение условия $\det \mathbf{A}(\omega_n^p) < \varepsilon_2$. В расчетах брались значения $\varepsilon_1 = 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 10^{-16}$.

Внутри каждой итерации численно рассчитывается только матрица $\mathbf{P}(\omega_n^p)$. Каждый коэффициент $p_{jk}(\omega_n^p)$ требует вычисления двух вложенных интегралов: внутреннего из (1.2) и внешнего из (2.1). Внутренний интеграл вычисляется методом Симпсона, внешний – методом трапеций.

Расчеты проводились с использованием пяти базисных функций ($N = 5$). На фиг. 2 для примера показана сходимость численного метода при увеличении числа базисных функций, откуда видно, что пяти функций вполне достаточно для вычисления собственных частот с приемлемой точностью.



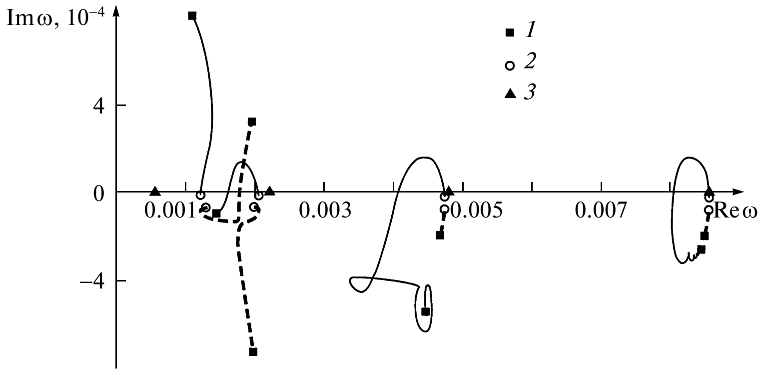
Фиг. 3. Траектории движения первых четырех собственных частот в комплексной плоскости при $D = 23.9$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $L = 300$, $1.5 \le M \le 2.7$: *1, 2* – частоты при $M = 1.5$, 2.7, *3* – частоты в вакууме. Сплошные линии – расчет по точной теории, пунктирные – по поршневой

3. Результаты вычислений при $M \ge 1.5$. Все расчеты проводятся для стальной пластины, обтекаемой потоком воздуха ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0.3$, $a = 300$ м/с, $\rho = 1$ кг/м^3, $\rho_m = 8500$ кг/м^3). Соответствующие безразмерные параметры равны $D = 23.9$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$.

Рассмотрим результаты расчетов по точной теории. Фиксируем ширину пластины $L = 300$ и число Маха $M = 1.5$. Все собственные частоты лежат в нижней полуплоскости (фиг. 3), и положение пластины устойчиво. Будем увеличивать число Маха, зафиксировав все остальные параметры. Первые две собственные частоты сближаются, и при $M = 2.27$ почти сливаются. При дальнейшем увеличении M они расходятся в направлениях, перпендикулярных своим траекториям до слияния: первая частота движется вверх, вторая – вниз почти параллельно мнимой оси ω. При $M = 2.29$, т.е. практически сразу после слияния, первая частота пересекает вещественную ось и перемещается в верхнюю полуплоскость – положение пластины становится неустойчивым. Возникает "связанный" флаттер пластины, возникающий из-за взаимодействия двух низших собственных частот через аэродинамическую связь. При этом третья и более высокие собственные частоты в диапазоне $1.5 < M < 2.7$ меняются слабо и их движение в комплексной плоскости не приводит к неустойчивости.

На фиг. 3 пунктирной линией показаны те же траектории движения собственных частот в комплексной плоскости, но вычисленные с использованием поршневой теории вместо точной. Как видно, в диапазоне $M > 1.5$ частоты, вычисленные по точной и поршневой теориям, весьма близки. Потеря устойчивости после слияния частот по "связанному" типу происходит при $M = 2.30$, т.е. критическое число Маха практически совпадает с точным. При дальнейшем увеличении M различие собственных частот, вычисленных по точной и поршневой теориям, практически исчезает, что еще раз подтверждает то, что поршневая теория, будучи намного проще точной, хорошо работает при больших *M*.

4. Результаты вычислений при $M < 1.5$. Будем уменьшать число Маха от 1.5 до 1.05, считая остальные параметры фиксированными. Как видно на фиг. 4, при некото-



Фиг. 4. Траектории движения первых четырех собственных частот в комплексной плоскости при $D = 23.9$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $L = 300$, $1.05 \le M \le 1.5$: *1, 2* – частоты при $M = 1.05, 1.5$, *3* – частоты в вакууме. Сплошные линии – расчет по точной теории, пунктирные – по поршневой

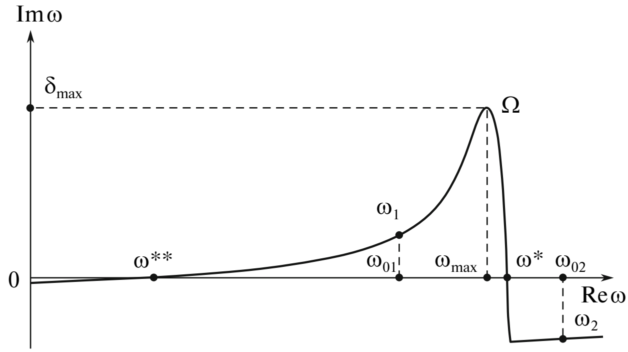
ром M_n^{**} n-я собственная частота перемещаются в верхнюю полуплоскость, результаты расчета M_n^{**} приведены ниже

n	1	2	3	4
M_n^*	<1.05	1.10	1.10	1.17
M_n^{**}	1.41	1.41	1.44	1.45

При этом они не сближаются друг с другом, т.е. не происходит взаимодействия двух мод колебаний, которое наблюдается при связанном типе флаттера. Таким образом, эта неустойчивость является флаттером с одной степенью свободы [7], или, другими словами, одномодовым флаттером.

При дальнейшем уменьшении M инкремент колебаний каждой из мод достигает максимума и затем начинает уменьшаться. При некотором $M = M_n^*$ он вновь становится отрицательным, а соответствующая мода – затухающей (результаты расчета M_n^* приведены выше). Таким образом, каждая из четырех исследуемых мод в диапазоне $M_n^* \le M \le M_n^{**}$ находится в зоне одномодовой неустойчивости.

Результаты вычислений по поршневой теории при $M < 1.5$, показанные на фиг. 4 пунктирной линией, резко отличаются от результатов по точной теории. Во-первых, одномодовый флаттер по поршневой теории вообще не наблюдается. Вплоть до $M = 1.10$ все частоты лежат в нижней полуплоскости. При $M = 1.10$ возникает флаттер связанного типа между 1-й и 2-й модами, однако в действительности он нефизичен. Действительно, флаттер связанного типа возникает, когда коэффициент $\mu M^2 / \sqrt{M^2 - 1}$ при $\partial W / \partial x$ в формуле (1.4) становится большим. Это происходит как при достаточно большом числе Маха (полученный выше флаттер при $M > 2.30$), так и при M, близких к 1.



Фиг. 5. Характерный вид кривой Ω и построение собственных частот из асимптотической теории

То, что при M, близких к 1, поршневая теория становится количественно неверной, было известно и ранее, но, как показывают представленные выше расчеты по точной теории, она становится качественно неверной: она “не видит” одномодового флаттера, который возникает в действительности, и дает еще одну область неустойчивости связанного типа, которой на самом деле нет.

5. Сравнение численных и асимптотических результатов при меняющемся M. Между результатами расчетов, в которых обнаруживаются два типа потери устойчивости – связанный и одномодовый, прослеживается связь с результатами работы [13], где оба типа флаттера (названные там “низкочастотным” и “высокочастотным”) были исследованы аналитически с помощью асимптотического метода глобальной неустойчивости. Особенно нагляден метод вычисления собственных частот, лежащих близко к области одномодовой неустойчивости. Рассмотрим его.

В [13] было показано, что при достаточно большой ширине пластины L собственные частоты пластины в потоке газа лежат вблизи кривой Ω в комплексной плоскости ω, причем эта кривая зависит от параметров M, μ, D и не зависит от L (фиг. 5). Предполагая, что влияние газа на абсолютное значение собственных частот невелико (так как $\mu \ll 1$), и $\mathrm{Im}\,\omega \ll \mathrm{Re}\,\omega$, получаем следующий графический метод вычисления собственных частот. Нанесем на комплексную плоскость кривую Ω и отметим на вещественной оси собственные частоты пластины в вакууме. Тогда собственные частоты пластины в потоке получаются проекцией собственных частот в вакууме на Ω вдоль прямых $\mathrm{Re}\,\omega = \mathrm{const}$ (фиг. 5).

Отсюда следует поведение траекторий, описываемых частотами, при изменении параметров задачи. При изменении числа Маха M частоты пластины в вакууме не меняются, а кривая Ω меняется, причем сдвигаются и границы диапазона $\omega^{**} < \mathrm{Re}\,\omega < \omega^*$, в котором Ω лежит в верхней полуплоскости [13]

$$\omega^*(M, D) \approx \frac{(M-1)^2}{\sqrt{D}}, \quad \omega^{**}(M, D) = \frac{M^2 + 1 - \sqrt{4M^2+1}}{\sqrt{D}}$$

Значение ω^* приведено с порядком точности $\mu^{2/3}$, значение ω^{**} положительно при $M > \sqrt{2}$; при $M \le \sqrt{2}$ кривая Ω лежит в верхней полуплоскости на всем отрезке $0 < \mathrm{Re}\,\omega < \omega^*$.

В результате получаем следующую картину. При достаточно больших M имеем: $\omega_{0n} < \omega^{**}$ и n -я мода является затухающей. При уменьшении M точки ω^{**}, ω^* движутся влево, при $M = M_n^{**}$ (которое находится из условия $\omega_{0n} = \omega^{**}$) $\mathrm{Im}\,\omega$ становится положительным, достигает максимума, уменьшается, и при $M = M_n^*$ (которое находится из условия $\omega_{0n} = \omega^*$) снова становится отрицательным. Такое же поведение наблюдалось выше в численных результатах при $M < 1.5$.

Результаты расчета M_n^{**} и M_n^* из асимптотической теории приведены ниже

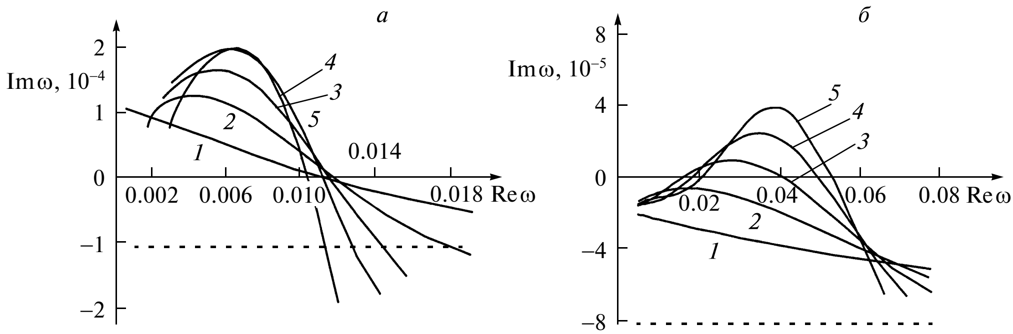
n	1	2	3	4
M_n^*	1.05	1.10	1.15	1.20
M_n^{**}	1.42	1.43	1.44	1.46

При слишком больших M, когда $\omega_{0n} \ll \omega^{**}$, предположение о малом изменении $\mathrm{Re}\,\omega_n$ при изменении M становится неверным. Связь различных мод пластины через поток газа становится сильной, частоты при увеличении M сближаются, и возникает флаттер связанного типа.

6. Сравнение численных и асимптотических результатов при меняющемся L. Особенно простым будет поведение собственных частот пластины в потоке, вытекающее из асимптотической теории при фиксированных D, M, μ и меняющемся L. Действительно, положение Ω на комплексной плоскости в этом случае фиксировано, а частоты пластины в вакууме меняются. Отсюда следует, что траектории движения всех частот совпадают и представляют собой Ω.

На фиг. 6 представлены результаты расчета траекторий движения собственных частот (точная аэродинамическая теория) при фиксированных параметрах $D = 23.9$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $M = 1.2$ и 1.5 и меняющемся L. Результаты расчета по асимптотической теории дают при $M = 1.2$: $\omega^* \approx 0.0082$, $\omega^{**} = -0.0327$, что означает, что Ω лежит в верхней полуплоскости в диапазоне $0 < \mathrm{Re}\,\omega < 0.0082$. Аналогичные результаты при $M = 1.5$: $\omega^* \approx 0.0511$, $\omega^{**} = 0.0179$, т.е. Ω лежит в верхней полуплоскости в диапазоне $0.0179 < \mathrm{Re}\,\omega < 0.0511$. Как видно из фиг. 6, при $M = 1.2$ асимптотические результаты дают близкие к численным величины ω^*, ω^{**} для всех мод, при $M = 1.5$ — начиная с $n = 4$.

Однако, несмотря на относительную близость асимптотических границ устойчивости к численным, сами траектории движения (т.е. инкременты усиления колебаний) далеки от асимптотических. В частности, величина $\delta_{\max}$ (фиг. 5), найденная из асимптотической теории, равна 0.00037 при $M = 1.2$, и 0.00035 при $M = 1.5$. Как видно, эта величина примерно в 1.85 раза выше полученной численно по точной теории при $M = 1.2$, и в 8.75 раз – при $M = 1.5$. Такое несовпадение объясняется следующим. Асимптотические решения [13] строились в виде линейной комбинации волн, бегущих по воображаемой безграничной пластине. В результате были удовлетворены все граничные условия задачи, кроме условия непротекания на абсолютно жесткой плоскости при $x < 0$. В результате значения давления, вычисленные по асимптотической и по точной теориям, в окрестности передней кромки пластины сильно различаются, что и объясняет сильное различие $\delta_{\max}$. В то же время, как показывают расчеты, влия-



Фиг. 6. Траектории движения первых пяти собственных частот в комплексной плоскости ω при параметрах $D = 23.9$, $\mu = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $M = 1.2$ (*а*), $M = 1.5$ (*б*) и при меняющемся L. Сплошные линии – расчет по точной теории, пунктирные – по поршневой (все траектории в последнем случае совпадают). Цифры – номер соответствующей моды.

ние этих различий на сам факт неустойчивости и ее границы намного слабее, и при малых $M > 1$ ими можно пренебречь.

Заключение. Проведено численное исследование поведения собственных частот колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа при различных параметрах задачи. Для давления газа использована точная и поршневая теории.

При использовании точной теории при низких сверхзвуковых числах Маха по низшим модам возникает одномодовый флаттер, который не может быть обнаружен с помощью поршневой теории. Границы устойчивости этого типа флаттера хорошо описываются асимптотическими результатами, полученными ранее. В то же время инкременты усиления колебаний, получаемые из асимптотической теории, завышены.

При более высоких числах Маха возникает флаттер связанного типа. Его границы устойчивости, полученные по точной и поршневой теориям, практически совпадают.

Работа поддержана грантом РФФИ (08-01-00618) и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-1959.2008.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. *Григолюк Э.И., Лампер Р.Е., Шандаров Л.Г.* Флаттер панелей и оболочек // Итоги науки. Механика. 1963. М.: ВИНИТИ, 1965. С. 34–90.
3. *Dowell E.H.* Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of plates and shells // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 3. P. 385–399. = *Дауэлл Е.* Панельный флаттер. Обзор исследований аэроупругой устойчивости пластинок и оболочек // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8. № 3. С. 3–24.
4. *Dowell E.H.* Aeroelasticity of Plates and Shells. Leyden: Nordhoff, 1975. 139 p.
5. *Новичков Ю.Н.* Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. “Механика деформируемого твердого тела”. М.: ВИНИТИ, 1978. Т. 11. С. 67–122.
6. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
7. A Modern Course in Aeroelasticity / Ed. Dowell E.H. Dordrecht: Kluwer, 2004. 752 p.
8. *Мовчан А.А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 2. С. 211–222.

9. *Мовчан А.А.* Об устойчивости панели, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 231–243.
10. *Nelson H.C., Cunnigham H.J.* Theoretical investigation of flutter of two-dimensional flat panels with one surface exposed to supersonic potential flow. NACA. 1956. Report № 1280. 24 p.[1]
11. *Yang T.Y.* Flutter of flat finite element panels in supersonic potential flow // AIAA Journal. 1975. V. 13. № 11. P. 1502–1507. = *Янг Т.* Исследование флаттера панелей в сверхзвуковом потенциальном потоке методом конечных элементов // Ракетная техника и космонавтика. 1975. Т. 13. № 11. С. 110–117.
12. *Bendiksen O.O., Davis G.A.* Nonlinear traveling wave flutter of panels in transonic flow // AIAA Paper. 1995. № 95–1486. 17 p.
13. *Веденеев В.В.* Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
14. *Веденеев В.В.* О высокочастотном флаттере пластины// Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 163–172.
15. *Веденеев В.В.* Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 173–181.

Москва

Поступила в редакцию
31.III.2008

[1] http://naca.larc.nasa.gov/reports/1956/naca-report-1280/naca-report-1280.pdf