

УДК 533.6.013.42

© 2012 г. В. В. ВЕДЕНЕЕВ

ОДНОМОДОВЫЙ ФЛАТТЕР ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Асимптотическими методами исследуется устойчивость упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа, при этом учитывается пограничный слой, образующийся на поверхности пластины. Показано, что в зависимости от формы профиля погранслоя его влияние может быть двух типов. В случае обобщенно-выпуклых профилей (характерных для ускоряющегося течения) сверхзвуковые колебания пластины стабилизируются, а дозвуковые — дестабилизируются. В случае профилей с обобщенной точкой перегиба, лежащей в дозвуковой части слоя (характерных для однородных и замедляющихся течений), сверхзвуковые возмущения дестабилизируются в тонком погранслое и стабилизируются при достаточно толстом слое; дозвуковые возмущения затухают.

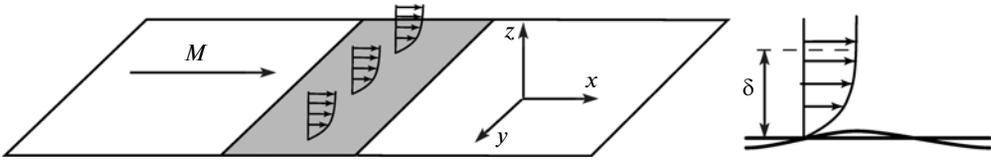
Ключевые слова: панельный флаттер, флаттер пластины, одномодовый флаттер, пограничный слой, гидродинамическая неустойчивость.

Ранее асимптотическими методами исследовалась задача об устойчивости упругой пластины в потенциальном потоке невязкого газа [1]. Показано, что наряду с известным и детально изученным флаттером связанного типа [2] также может возникать одномодовый флаттер, ранее не изучавшийся. При этом одномодовый флаттер не может быть обнаружен и исследован с помощью поршневой теории, обычно используемой в аэроупругости, и требует применения точной теории потенциального течения газа или более сложных теорий. Позднее эти результаты были подтверждены численно [3] и экспериментально [4].

В предыдущих работах вязкостью газа пренебрегалось, и течение считалось однородным. Однако в [5, 6] показано, что при наличии пограничного слоя флаттер может быть ослаблен или полностью подавлен. Этот результат был получен при исследовании конкретного профиля пограничного слоя — закона одной седьмой. Однако при движении летательных аппаратов в зависимости от условий обтекания в разных частях поверхности могут образовываться качественно разные профили пограничных слоев. В настоящей работе аналитически исследуется влияние пограничного слоя произвольного вида на одномодовый флаттер.

1. Постановка задачи. Исследуется устойчивость упругой изотропно растянутой пластины, обтекаемой с одной стороны плоскопараллельным потоком газа. Пластина имеет форму полосы и вделана в безграничную абсолютно жесткую плоскость. На ее поверхности имеется пограничный слой (фиг. 1) с профилями скорости $u_0(z)$ и температуры $T_0(z)$, которые обезразмерены соответственно на скорость звука и температуру основного потока.

Задача решается в плоской постановке при отсутствии зависимости от координаты y в предположении, что невозмущенное течение плоскопараллельное, т.е. не зависит от x . Считается, что течение ламинарное, а число Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$. Это эквивалентно тому, что при малых возмущениях газ ведет как невязкий, а действие вязкости выражено лишь в неоднородном распределении скорости и температуры.



Фиг. 1. Течение около пластины

Уравнение движения пластины в безразмерных переменных имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - M_w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0 \quad (1.1)$$

Здесь w – прогиб пластины, D – ее жесткость, параметр M_w характеризует ее натяжение, p – возмущение давления газа, создающееся возмущением самой пластины и соответственно зависящее от w . В задаче также имеется параметр L – длина пластины, отнесенная к толщине, и μ – отношение плотности основного потока к плотности материала пластины. Подробное определение безразмерных параметров приведено в [1].

Исследование состоит из двух этапов. Сначала пластина считается безграничной, и изучаются ее возмущения в виде бегущих волн: $w(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$. Затем, считая пластину конечной, ее собственные функции строятся в виде суперпозиции бегущих волн, удовлетворяющей граничным условиям. При этом используется асимптотический критерий глобальной неустойчивости [7].

2. Дисперсионное уравнение безграничной пластины в потоке газа. В этом разделе считается, что пластина безгранична, возмущение имеет вид $w(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$. Для вывода дисперсионного уравнения, связывающего k и ω , необходимо вычислить возмущение давления, действующее на пластину. Распространение возмущений в сдвиговом слое сжимаемого газа описывается сжимаемым уравнением Рэлея [8]

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(u_0 - c)dv/dz - vdu_0/dz}{T_0 - (u_0 - c)^2} \right) - \frac{1}{T_0} k^2 (u_0 - c)v = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $c = \omega/k$ – фазовая скорость волны, $v(z)$ – возмущение вертикальной компоненты скорости газа. Возмущение давления выражается через $v(z)$ так

$$p(z) = \frac{\mu}{ik} \frac{(u_0 - c)dv/dz - vdu_0/dz}{T_0 - (u_0 - c)^2}$$

Коэффициент $e^{i(kx - \omega t)}$ у $v(z)$ и $p(z)$ для краткости опущен. Уравнение Рэлея может иметь две особенности [8, 9]. Первая особенность, в критической точке z_c , где $u_0(z_c) = c$, приводит к сингулярности решения, которая будет обсуждаться ниже. Вторая особенность, в точке, где $T_0(z) - (u_0(z) - c)^2 = 0$ и фазовая скорость волны равна местной скорости звука, является устранимой.

Рассмотрим граничные условия для уравнения Рэлея. На поверхности пластины $z = 0$ ставится условие непротекания. Второе условие ставится на внешней поверхности пограничного слоя $z = \delta$, где δ – толщина слоя, отнесенная к толщине пластины. Считаем, что при $z > \delta$ течение однородное, $u_0 \equiv M_\infty$ – число Маха основного течения, $T_0 \equiv 1$. Уравнение Рэлея (2.1) сводится к уравнению с постоянными коэффициен-

тами и имеет решение $v(z) = Ce^{\gamma z}$, $\gamma = -\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}$, причем из условия затухания возмущений при $z \rightarrow +\infty$ должна выбираться такая ветвь радикала, что $\text{Re} \gamma < 0$ при $\text{Im} \omega \gg 1$. Это экспоненциальное решение вне пограничного слоя должно срачиваться с решением внутри пограничного слоя. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$v = -i\omega \quad (z = 0), \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = \gamma \quad (z = \delta) \tag{2.2}$$

Решение уравнения Рэлея может быть построено в виде сходящегося ряда по степеням k^2 [8]. В реальных пластинах практический интерес представляют волны с длиной, существенно превышающими толщину пограничного слоя. Поэтому предполагаем $|k| \ll 1$ и ограничиваемся нулевым приближением. Пренебрегая в (2.1) вторым слагаемым порядка k^2 , имеем

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(u_0 - c)dv/dz - vdu_0/dz}{T_0 - (u_0 - c)^2} \right) = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(z) = \left(c_1 \left(\int_0^z \frac{T_0(\zeta)d\zeta}{(u_0(\zeta) - c)^2} - z \right) + c_2 \right) (u_0(z) - c) \tag{2.3}$$

$$p(z) \equiv \frac{c_1 \mu}{ik} \tag{2.4}$$

Непосредственно видно, что (2.3) имеет особенность в критической точке, которая не может быть устранена в рамках невязкого приближения. Решения, являющиеся пределом решений вязкой системы – аналога уравнения Орра–Зоммерфельда в несжимаемом случае, при исчезающей вязкости строятся так, чтобы интегрирование велось вдоль контура в комплексной плоскости z с обходом критической точки снизу [8, 9]. В частности, при $\text{Im} c > 0$ (растущие возмущения) интегрирование можно вести вдоль вещественной оси z . В случае $\text{Im} c \leq 0$ (нейтральные и затухающие возмущения) интегрирование должно вестись в комплексной плоскости с обходом особенности.

Наличие особенности приводит к тому, что при $c \in \mathbf{R}$ функция $v(z)$ является комплексной и имеет разрыв в критической точке. Если выбрать c_1 и c_2 так, что $v \in \mathbf{R}$ при $z > z_c$, то v при $z < z_c$ скачком приобретает мнимую часть. Физически это означает, что при переходе через критическую точку скачком меняется фаза возмущения. Этот разрыв фазы отсутствует в однородном потоке и может приводить к стабилизации или дестабилизации возмущений в пограничном слое.

Подставляя (2.3) в граничные условия (2.2), из (2.4), получаем возмущение давления на поверхности пластины

$$p(0) = -\mu \left(\left(\frac{(M_\infty k - \omega)^2}{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}} \right)^{-1} + \left(\int_0^\delta \frac{T_0(\zeta)d\zeta}{(u_0(\zeta) - c)^2} - \delta \right) \right)^{-1}$$

Для дальнейшего анализа из интеграла удобно явно выделить толщину пограничного слоя δ , для чего сделаем замену $\zeta = \delta \eta$

$$\int_0^\delta \frac{T_0(\zeta)d\zeta}{(u_0(\zeta) - c)^2} = \delta \int_0^1 \frac{T_0(\eta)d\eta}{(u_0(\eta) - c)^2}$$

Далее функции $u_0(\eta)$ и $T_0(\eta)$ рассматриваются как определяющие профиль пограничного слоя, при этом η меняется от 0 до 1.

Подставляя прогиб $w = e^{i(kx - \omega t)}$ и возмущение давления $p = p(0)e^{i(kx - \omega t)}$ в (1.1), получаем дисперсионное уравнение

$$F(k, \omega) = (Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \left(\left(\frac{(M_\infty k - \omega)^2}{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}} \right)^{-1} + \delta \left(\int_0^1 \frac{T_0(\eta) d\eta}{(u_0(\eta) - c)^2} - 1 \right) \right)^{-1} = 0 \quad (2.5)$$

При $\delta \rightarrow 0$ оно в точности превращается в дисперсионное уравнение пластины в однородном потенциальном потоке [1]

$$(Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \frac{(M_\infty k - \omega)^2}{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}} = 0$$

Решение $\omega(k)$ дисперсионного уравнения легко получить в предположении, что $\mu \ll |k|$, $\mu \ll |\omega|$. Раскладывая по формуле Тейлора по μ , имеем

$$\omega(k, \mu) = \omega(k, 0) + \mu \left. \frac{\partial \omega}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} + o(\mu) = \omega(k, 0) - \mu \frac{\partial F}{\partial \mu} / \left. \frac{\partial F}{\partial \omega} \right|_{\mu=0} + o(\mu)$$

Отсюда с точностью до малых порядка μ

$$\omega(k, \mu) = \omega(k, 0) - \frac{\mu}{2\omega(k, 0)} \left(\left(\frac{(M_\infty k - \omega)^2}{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}} \right)^{-1} + \delta \left(\int_0^1 \frac{T_0(\eta) d\eta}{(u_0(\eta) - c)^2} - 1 \right) \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Выражение в скобках вычисляется при $\mu = 0$.

Подчеркнем, что малость μ по сравнению с k и ω является существенным предположением, при котором слишком длинные волны исключаются из рассмотрения. Оно справедливо при изучении одномодового флаттера, но неверно для флаттера связанного типа, так как в последнем случае $\mu \sim \omega$ [1].

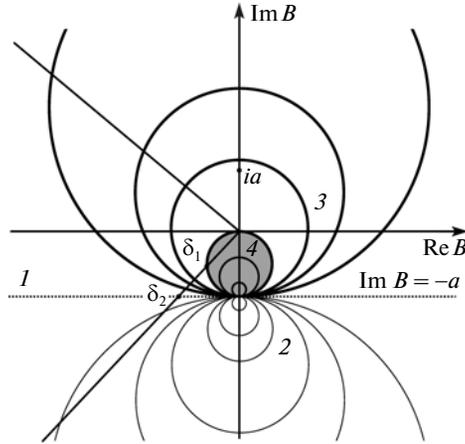
3. Влияние пограничного слоя на усиливающуюся волну. Исследуем, как влияет наличие пограничного слоя на усиление бегущих волн в безграничной пластине. Выделим три типа волн: 1) при отсутствии пограничного слоя волна растущая, возмущение сверхзвуковое по отношению к течению: $0 < c < M_\infty - 1$; 2) при отсутствии пограничного слоя волна нейтральная, возмущение дозвуковое: $M_\infty - 1 < c < M_\infty + 1$; 3) при отсутствии пограничного слоя волна затухающая, возмущение сверхзвуковое: $c > M_\infty + 1$ или $c < 0$.

Рассмотрим сначала волны первого типа. Обозначим:

$$A = \frac{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}}{(M_\infty k - \omega)^2} = \frac{\sqrt{1 - (M_\infty - c)^2}}{k(M_\infty - c)^2}, \quad B = \delta \left(\int_0^1 \frac{T_0(\eta) d\eta}{(u_0(\eta) - c)^2} - 1 \right)$$

тогда

$$\text{Im} \omega(k, \mu) = -\frac{\mu}{2\omega(k, 0)} \text{Im}(A + B)^{-1}$$



Фиг. 2. Линии уровня $\text{Im}(A+B)^{-1}$: 1 – $\text{Im}(A+B)^{-1} = 0$; 2 – семейство линий ниже 1, $\text{Im}(A+B)^{-1} > 0$; 3 – семейство линий выше 1, $\text{Im}(A+B)^{-1} < 0$; 4 – область $\text{Im}(A+B)^{-1} < \text{Im}A^{-1} < 0$

Так как волна при $\delta = 0$ усиливается, то $\text{Im}A = a > 0$, $\text{Re}A = 0$.

Нетрудно показать, что множество значений B , являющихся линиями уровня $\text{Im}(A+B)^{-1}$, есть окружности с центром на мнимой оси, проходящие через точку $(0; -a)$. Если второе пересечение мнимой оси окружностью лежит выше этой точки, то $\text{Im}(A+B)^{-1} < 0$, если ниже, то $\text{Im}(A+B)^{-1} > 0$. Линия уровня $\text{Im}(A+B)^{-1} = \text{Im}A^{-1}$ – окружность, проходящая через точку $B = 0$. Случай $\text{Im}(A+B)^{-1} = 0$ (нейтральные возмущения) соответствует горизонтальной прямой, проходящей через точку $(0; -a)$ (фиг. 2).

Зафиксируем фазовую скорость c и рассмотрим зависимость $\text{Im}(A+B)^{-1}$ от толщины пограничного слоя δ , считая профили $u_0(\eta)$ и $T_0(\eta)$ заданными. Величина A не зависит от δ , а B – зависит линейно. Тогда значения B на комплексной плоскости, соответствующие различным δ , лежат на луче, выходящем из начала координат. Возможны два случая. При $\text{Im}B \geq 0$ этот луч направлен вверх или горизонтально. В этом случае при любой толщине пограничного слоя волна, бегущая по пластине, является растущей, причем скорость роста волн всегда меньше, чем при отсутствии пограничного слоя, и монотонно стремится к нулю при $\delta \rightarrow \infty$.

Во втором случае $\text{Im}B < 0$, луч направлен вниз. При $0 < \delta < \delta_1$ усиление волны при наличии пограничного слоя положительно и больше, чем при его отсутствии – при δ_1 луч пересекает окружность $\text{Im}(A+B)^{-1} = \text{Im}A^{-1}$. При $\delta_1 < \delta < \delta_2$ усиление по-прежнему положительно, но меньше, чем при отсутствии пограничного слоя – при δ_2 луч пересекает прямую $\text{Im}(A+B)^{-1} = 0$. Наконец, при $\delta > \delta_2$ волна становится затухающей.

Значение $\text{Im}B$, определяющее качественное поведение волны при разных δ , вычисляется в явном виде. Интеграл, входящий в выражение B , имеет особенность при $\eta = \eta_c$, которая при интегрировании должна обходиться снизу. Разложим профили пограничного слоя в ряд Тейлора в окрестности $\eta = \eta_c$

$$T_0(\xi) = T_{00} + T_{01}\xi + \dots, \quad u_0(\xi) = c + u_{01}\xi + u_{02}\xi^2/2 + \dots, \quad \xi = \eta - \eta_c$$

Здесь T_{0n} и u_{0n} — n -е производные функций в критической точке. Имеем

$$\frac{T_0(\xi)}{(u_0(\xi) - c)^2} = \frac{T_{00} + T_{01}\xi + \dots}{(u_{01}\xi + u_{02}\xi^2/2 + \dots)^2} = \frac{T_{00}}{u_{01}^2 \xi^2} + \frac{1}{u_{01}^2} \left(T_{01} - T_{00} \frac{u_{02}}{u_{01}} \right) \frac{1}{\xi} + \text{рег. чл.} \quad (3.1)$$

Так как источником мнимой части B является член с $1/\xi$, получаем

$$\text{Im} B = \frac{\pi \delta}{u_{01}^2} \left(T_{01} - T_{00} \frac{u_{02}}{u_{01}} \right) = -\pi \delta \frac{T_0^2}{u_0^3} \left(\frac{u_0'}{T_0} \right),$$

Здесь штрихом обозначена производная по z в критической точке. Таким образом, $\text{Im} B$ определяется помимо толщины слоя только локальным поведением профилей скорости и температуры в окрестности критической точки. Значения $\text{Re} B$ зависят от всех регулярных членов полученного выше разложения, т.е. определяются профилями на всем отрезке $[0; 1]$.

В случае $\text{Im} B < 0$ и $0 < \delta < \delta_1$ усиление волны при наличии пограничного слоя больше, чем при его отсутствии. Чем ближе $|\text{Re} B|$ к нулю (направление луча — к вертикали), тем большего усиления можно добиться за счет пограничного слоя. В предельном случае $\text{Re} B = 0$ и $\text{Im} B \rightarrow -a$ величина $\text{Im}(A + B)^{-1}$, а вместе с ней $\text{Im} \phi$ стремится к бесконечности при $\delta \rightarrow \delta_1$.

При $c \rightarrow 0$ и $c \rightarrow M_\infty$ поведение $\text{Re} B$ можно выяснить в общем случае. После интегрирования (3.1) главный член $\text{Re} B$ есть

$$\int_{-\eta_c}^{1-\eta_c} \frac{T_{00}}{u_{01}^2 \xi^2} d\xi = -\frac{T_{00}}{u_{01}^2} \frac{1}{\xi} \Big|_{-\eta_c}^{1-\eta_c} = -\frac{T_{00}(\eta_c)}{u_{01}^2(\eta_c)} \left(\frac{1}{1-\eta_c} + \frac{1}{\eta_c} \right)$$

Таким образом, при $c \rightarrow 0$ и $c \rightarrow M_\infty$ ($\eta_c \rightarrow 0$ и $\eta_c \rightarrow 1$ соответственно) $\text{Re} B \rightarrow -\infty$, т.е. направление луча стремится к горизонтальному.

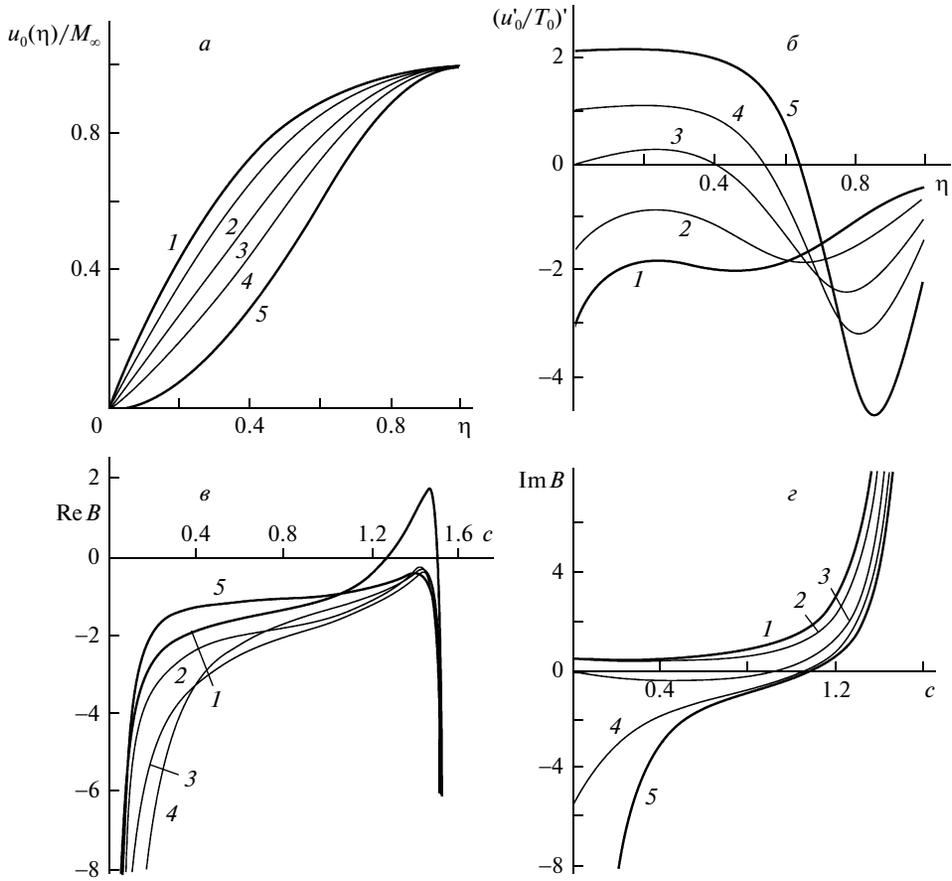
4. Пример: профили ускоряющихся и замедляющихся течений. Рассмотрим профили, возникающие в автомодельных пограничных слоях [10], характеризующихся параметром β . При $\beta > 0$ течение ускоряется, при $\beta < 0$ — замедляется, при $\beta = 0$ течение однородное. В несжимаемой жидкости аналоги таких автомодельных пограничных слоев возникают при степенной зависимости скорости основного потока от координаты $u_\infty = Cx^m$, $\beta = 2m/(m+1)$. Будем предполагать, что длина волны пластины много меньше характерного размера области, в которой существенно изменяется скорость основного потока. Другими словами, под замедляющимся или ускоряющимся течением будем понимать соответствующий профиль пограничного слоя, по-прежнему считая основное течение однородным.

При числе Прандтля $\text{Pr} = 1$ и теплоизолированной пластине распределение скорости находится с помощью решения $f(\xi)$ уравнения

$$f''' + ff'' = \beta(f'^2 - 1), \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 1$$

Зависимость скорости от автомодельной переменной ξ дается выражением $u_0(\xi) = f'(\xi)$. Физическая координата z при каждом ξ восстанавливается так

$$z = C \int_0^\xi T_0(u_0(\xi)) d\xi$$



Фиг. 3. Профили скорости для ускоряющихся и замедляющихся течений над теплоизолированной пластиной при параметрах (4.2), $M_\infty = 1.6$, $Pr = 1$: профили скорости (а); обобщенная кривизна (б); $Re B$ (в), $Im B$ (г); 1–5 – $\beta = 2.0, 0.5, 0.0, -0.14, -0.199$

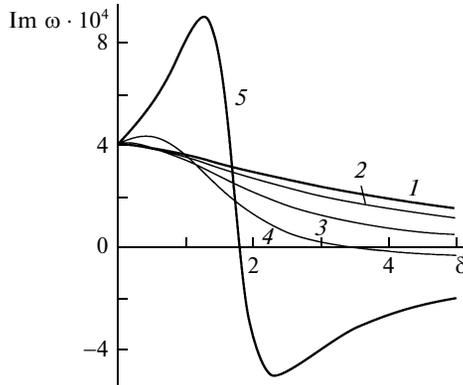
Распределение температуры $T_0(u_0)$ дается тем же выражением, что и при адиабатическом течении

$$T_0(u_0) = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} (M_\infty^2 - u_0^2) \tag{4.1}$$

Были рассмотрены профили (1–5), отвечающие $\beta = 2, 0.5, 0, -0.14, -0.199$ (фиг. 3, а). Последний случай является предельным значением β : $du_0(0)/dz < 0$ при $\beta < -0.199$, и пограничный слой отрывается от пластины. Расчеты проведены при параметрах, соответствующих стальной пластине в атмосфере на высоте 3 км, $M_\infty = 1.6$, и

$$D = 23.9, \quad M_w = 0, \quad \mu = 0.00012, \quad \gamma = 1.4 \tag{4.2}$$

Как видно на фиг. 3, в, г при профилях 1 и 2 $Im B > 0$, и рост колебаний пластины при увеличении δ ослабляется (фиг. 4). При профилях 3–5 в сверхзвуковой части $Im B < 0$, т.е. пограничный слой усиливает колебания при $\delta < \delta_1$ (фиг. 4). При этом для



Фиг. 4. Функция $\text{Im } \omega(\delta)$ для профилей 1–5 на фиг. 3 для параметров (4.2), $M_\infty = 1.6$, $k = 0.06$

профилей, близких к профилю 5, $|\text{Re} B|$ весьма мало на значительном интервале $c < M_\infty - 1$, и $\text{Im } \omega$ в пограничном слое растет очень существенно (фиг. 4).

5. Связь дестабилизации пластины пограничным слоем и устойчивости самого слоя. Рассмотрим вопрос о влиянии пограничного слоя на устойчивость пластины в связи с устойчивостью самого слоя на абсолютно жесткой пластине. Граничные условия в этом случае будут выглядеть так:

$$v = 0, \quad z = 0, \quad \frac{1}{v} \frac{dv}{dz} = \gamma, \quad z = 1$$

Из (2.3) получаем уравнение на собственные значения

$$\left(\frac{(M_\infty k - \omega)^2}{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}} \right)^{-1} + \delta \left(\int_0^1 \frac{T_0(\eta) d\eta}{(u_0(\eta) - c)^2} - 1 \right) = 0$$

или

$$A + B = 0 \tag{5.1}$$

Решения этого уравнения дают спектр собственных значений c при $|k| \ll 1$; если хотя бы для одного из них $\text{Im } c > 0$, то пограничный слой неустойчив.

Если пограничный слой неустойчив, то найдется его нейтральное возмущение, лежащее на границе неустойчивого диапазона k . Если это возмущение сверхзвуковое, т.е. $c \in [0; M_\infty - 1]$, то $\text{Re} A = 0$, $\text{Im} A > 0$. Тогда луч на фиг. 2 направлен вертикально вниз. Таким образом, для неустойчивости длинноволновых сверхзвуковых возмущений пограничного слоя необходимо, чтобы луч на фиг. 2 был направлен вертикально вниз при некотором $c \in [0; M_\infty - 1]$, в то время как для существенного усиления колебаний пластины достаточно лишь его близости к вертикали.

Необходимое условие существования нейтрального дозвукового возмущения ($M_\infty - 1 < c < M_\infty + 1$, $\text{Im} A = 0$) следует из (5.1): $\text{Im} B = 0$, т.е. в дозвуковой части пограничного слоя должна существовать точка, где $(u'_0/T_0)' = 0$, которую будем называть обобщенной точкой перегиба профиля. Это условие является необходимым и достаточным без предположения о малости k [8, 9]. Если же нейтральное дозвуковое возму-

щение существует (т.е. имеется обобщенная точка перегиба), то растущими являются только дозвуковые возмущения [11].

Профили разд. 4 устойчивы по отношению к длинноволновым сверхзвуковым возмущениям. Действительно, как видно из фиг. 3, $\text{Re}B$ не обращается в ноль ни при каких вещественных значениях $c < M_\infty - 1$, хотя и может быть сделан достаточно малым при $\beta = -0.199$, что дает сильный прирост $\text{Im}\omega$ при $\delta < \delta_1$ (фиг. 4). Однако, при $\beta = 0, -0.14, -0.199$ пограничный слой неустойчив по отношению к дозвуковым возмущениям, так как в дозвуковой части имеется точка, где $\text{Im}B = 0$ (фиг. 3, з).

Если профиль пограничного слоя такой, что обобщенная точка перегиба лежит в сверхзвуковой части пограничного слоя, такой слой может быть устойчив, давая при этом сколь угодно сильный рост колебаний пластины. Для последнего при $c \in [0; M_\infty - 1]$ должно быть $\text{Im}B < 0$, а $\text{Re}B$ – отрицательным и близким к нулю. При этом для устойчивости самого слоя $\text{Re}B \neq 0$ при $c \in [0; M_\infty - 1]$ (сверхзвуковые возмущения), $\text{Im}B \neq 0$ при $c \in [M_\infty - 1; M_\infty]$ (дозвуковые возмущения).

Для примера рассмотрим профиль температуры (4.1) и семейство профилей скорости, параметризованное параметром $s \in [0; 1]$, заданных естественным кубическим сплайном, проходящим через следующие точки

$$\begin{aligned} u_0(0) = 0, \quad u_0(0.105 - 0.045s) = 0.12M_\infty, \quad u_0(0.155 - 0.045s) = 0.21M_\infty, \\ u_0(0.6) = 0.88M_\infty, \quad u_0(1) = M_\infty \end{aligned} \quad (5.2)$$

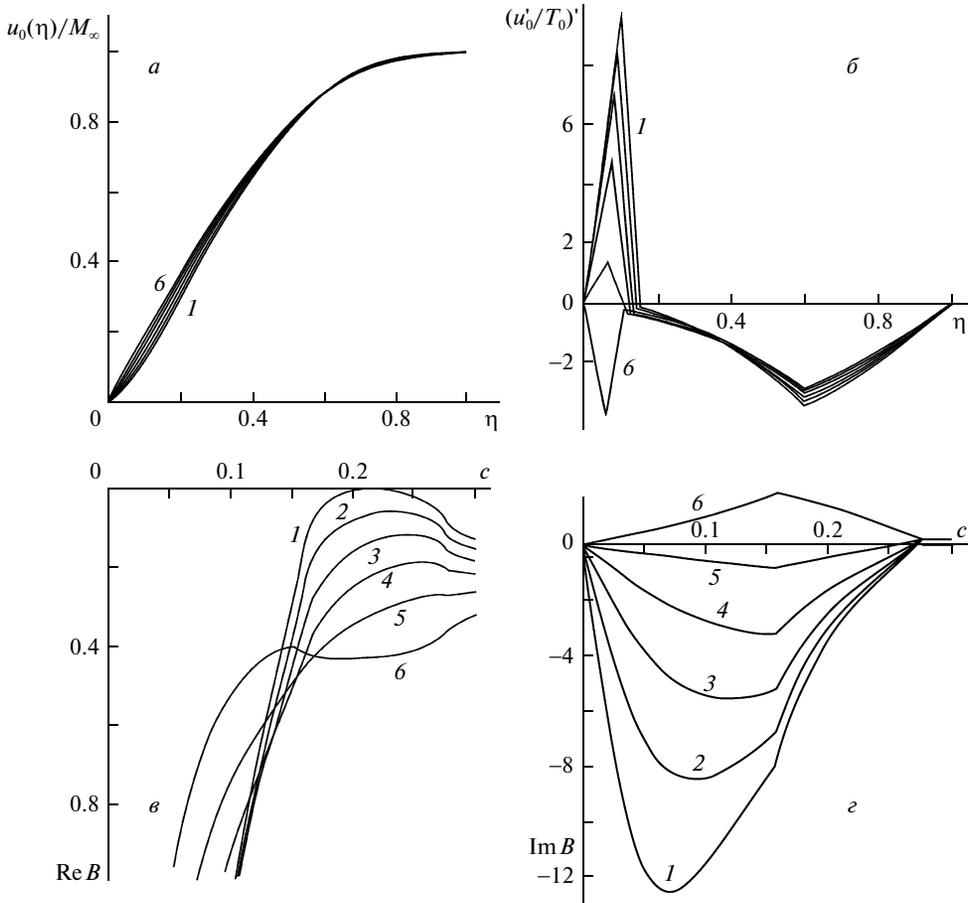
График $u_0(\eta)$ при нескольких значениях s показан на фиг. 5, а. При задании профиля s помощью кубического сплайна, т.е. функции с непрерывными производными вплоть до 2-й, подразумевается, что сплайн можно сколь угодно точно приблизить (вместе с 1-й и 2-й производными) аналитической функцией.

Графики $\text{Re}B(c)$ и $\text{Im}B(c)$ для этих профилей при $c \in [0; M_\infty - 1]$ показаны на фиг. 5, в, г. Все профили устойчивы по отношению к дозвуковым возмущениям (фиг. 5, б). При $s = 0$ функция $\text{Re}B(c)$ касается горизонтальной оси, т.е. имеется нейтральное сверхзвуковое возмущение; при $s > 0$ сверхзвуковые возмущения затухают. Таким образом, все эти профили устойчивы.

Однако, при $s \rightarrow 0$ луч на фиг. 2 при $c \approx 0.21$ стремится к вертикальному, что приводит к неограниченно быстрому усилению колебаний пластины при $\delta \rightarrow \delta_1$. Расчет $\text{Im}\omega(\delta)$ показан на фиг. 6 для параметров (4.2), $M_\infty = 1.3$. Как видно, при $s = 0.2$ величина $\text{Im}\omega$ может увеличиться более чем в 2 раза по сравнению с однородным потоком, при $s = 0.1$ – более чем в 4 раза, при $s \rightarrow 0$ значение $\text{Im}\omega$ может быть сколь угодно большим.

Отметим, что сколько угодно быстрый рост волны нарушает предположение, в котором получено разложение (2.6) – оно уже не будет линейным по μ . Фактически можно лишь сделать вывод, что $\text{Im}\omega \geq \mu$. Ситуация аналогична [12]: неограниченное усиление имеется и в потоке без пограничного слоя при $c \rightarrow M_\infty - 1$, в этом случае нелинейное разложение по μ дает $\text{Im}\omega \sim \mu^{2/3}$.

6. Влияние пограничного слоя на нейтральные и затухающие волны. Выше был рассмотрен вопрос о действии пограничного слоя в случае, когда волна в потенциальном потоке растущая, т.е. $0 < c < M_\infty - 1$. Предположим теперь, что волна затухающая, т.е. $M_\infty + 1 < c$ или $c < 0$. Тогда A чисто мнимо, причем $\text{Im}A < 0$. Критическая точка возмущения отсутствует, и $\text{Im}B = 0$. Тогда $0 < \text{Im}(A + B)^{-1} < \text{Im}A^{-1}$, т.е. пограничный слой всегда приводит к некоторому ослаблению затухания волны, но не может привести к ее усилению. Затухающие волны остаются затухающими.

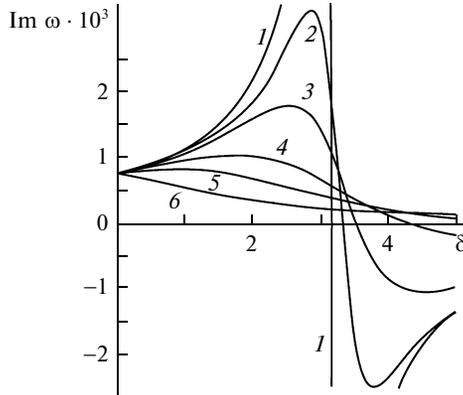


Фиг. 5. Профили скорости (5.2) для теплоизолированной пластины при параметрах (4.2), $M_\infty = 1.3$, $Pr = 1$: профили скорости (а); обобщенная кривизна (б); $Re B$ (в), $Im B$ (z); $1-6-s = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

Пусть теперь возмущение нейтральное, т.е. $M_\infty - 1 < c < M_\infty + 1$, и $Im A = 0$. При $M_\infty \leq c < M_\infty + 1$ критическая точка отсутствует, и $Im B = 0$. Возмущение при наличии пограничного слоя остается нейтральным.

При $M_\infty - 1 < c < M_\infty$ имеется критическая точка, и $Im B \neq 0$. Для течений с обобщенно-выпуклым профилем $(u'_0/T'_0)' < 0$, $sign Im B = -sign((u'_0/T'_0)') > 0$. Отсюда $Im(A + B)^{-1} < 0$, и $Im \omega > 0$, т.е. волна дестабилизируется пограничным слоем. При этом сам пограничный слой устойчив. Этот результат аналогичен полученному в [13], где было показано, что для пограничного слоя в несжимаемой жидкости с профилем Блазиуса упругость пластины приводит к дестабилизации системы при $Re \rightarrow \infty$.

Пусть теперь профиль имеет обобщенную точку перегиба z_{infl} в дозвуковой части слоя, для определенности будем считать $(u'_0/T'_0)' > 0$ при $z < z_{infl}$ и $(u'_0/T'_0)' < 0$ в противном случае (такая ситуация характерна для профилей на плоской теплоизолированной пластине). Тогда волны, имеющие критическую точку при $z > z_{infl}$, т.е. $M_\infty - 1 <$



Фиг. 6. Функция $\text{Im}\omega(\delta)$ для профилей (5.2) при параметрах (4.2), $M_\infty = 1.3$, $k = 0.043$ ($c \approx 0.21$): $I - \delta - s = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 1$

$< u_0(z_{\text{infl}}) < c < M_\infty$, дестабилизируются пограничным слоем, поскольку $\text{signIm}B = -\text{sign}(u_0'/T_0) > 0$, и $\text{Im}(A + B)^{-1} < 0$. Наоборот, волны с фазовой скоростью $M_\infty - 1 < c < u_0(z_{\text{infl}})$ стабилизируются.

7. Пластина больших, но конечных размеров. В этом разделе исследуется влияние пограничного слоя на пластину больших размеров. Ее собственные функции строятся асимптотическим методом [7] в виде суперпозиции волн в безграничной пластине, удовлетворяющей граничным условиям на краях конечной пластины.

Согласно [7], при ширине пластины $L \rightarrow \infty$ предельное множество спектра собственных частот не зависит от граничных условий на краях пластины и представляет собой кривую Ω на комплексной плоскости ω , заданную уравнением $\text{Im}k_2(\omega) = \text{Im}k_3(\omega)$, где k_2 и k_3 – ветви решений дисперсионного уравнения безграничной системы (2.5), соответствующие вперед (k_2) и назад (k_3) бегущим волнам. Так как μ – малый параметр, то, предполагая $\omega = \omega_R + i\omega_I$, $\omega_I \ll 1$, имеем разложение

$$k_j(\omega_R + i\omega_I, \mu) = k_j(\omega_R, 0) + i \frac{\omega_I}{g_j} + \mu \Delta(k_j) + o(\omega_I, \mu) \tag{7.1}$$

где

$$\Delta(k_j) = \frac{1}{2k_j(M_w^2 + 2Dk_j^2)} \left(\left(\frac{(M_\infty k_j - \omega)^2}{\sqrt{k_j^2 - (M_\infty k_j - \omega)^2}} \right)^{-1} + \delta \left(\int_0^1 \frac{T_0(\eta) d\eta}{(u_0(\eta) - c_j)^2 - 1} - 1 \right) \right)^{-1}$$

Здесь $c_j = \omega_R/k_j$ – фазовая скорость, $g_j = d\omega_R/dk_j$ – групповая скорость. Обозначая

$$g(\omega) = g_2 = -g_3 = \frac{2Dk_2^3 + k_2M_w^2}{\omega}$$

получаем уравнение асимптотической кривой Ω

$$\omega_I = -\frac{\mu g(\omega_R)}{2} \text{Im}(\Delta(k_2(\omega_R)) - \Delta(k_3(\omega_R))) = -\frac{\mu}{2\omega_R} \text{Im}((A + B)_2^{-1} + (A + B)_3^{-1}) \tag{7.2}$$

A и B – определенные ранее величины для бегущих вперед и назад волн.

Таким образом, инкремент колебания пластины в потоке газа с пограничным слоем есть среднее арифметическое усиления волн, бегущих по потоку и против потока.

По аналогии с волной в безграничной пластине, будем отдельно рассматривать колебания в зависимости от типа, который имеет вперед бегущая волна — растущая, нейтральная или затухающая (разд. 3). Рассмотрим первый случай. Если профиль пограничного слоя обобщенно-выпуклый, то вперед бегущая волна в пограничном слое остается растущей, но ее скорость роста уменьшается. Затухающая волна, бегущая против потока, остается затухающей, но скорость затухания также уменьшается. Суммарное действие, равное среднему арифметическому мнимых частей частот, вообще говоря, может приводить к изменению инкремента колебания конечной пластины как в большую, так и в меньшую сторону. Для типичных профилей пограничного слоя расчеты показывают, что суммарное действие приводит к уменьшению скорости роста колебания или к его затуханию (разд. 8).

В случае, если профиль пограничного слоя имеет обобщенную точку перегиба, и в сверхзвуковой части имеется область с $\text{Im } B < 0$, то в определенном диапазоне частот, где вперед бегущая волна в пограничном слое с $\delta < \delta_1$ усиливается, суммарное действие также усиливающее. Этот эффект особенно характерен для профилей замедляющихся течений, для которых усиление вперед бегущей волны может быть большим (разд. 4).

Рассмотрим теперь второй класс колебаний, соответствующий дозвуковым вперед бегущим волнам. Если профиль обобщенно-выпуклый или имеет обобщенную точку перегиба в сверхзвуковой части слоя, то для фазовых скоростей, близких к $M_\infty - 1$, скорость роста вперед бегущей волны может быть значительной и превышать затухание назад бегущей волны. Суммарным эффектом в таком случае будет усиление колебания конечной пластины.

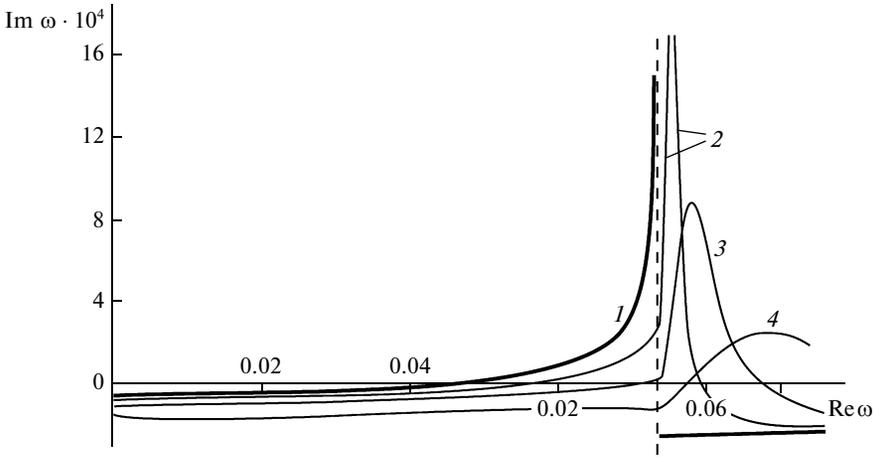
Если же профиль имеет обобщенную точку перегиба в дозвуковой части пограничного слоя, достаточно удаленную от точки перехода через скорость звука, то усиление вперед бегущей волны незначительно и не превышает затухание назад бегущей волны. Суммарным эффектом будет затухание колебания конечной пластины.

Для третьего класса колебаний и вперед, и назад бегущая волна затухает — в конечной пластине такие колебания также будут затухать.

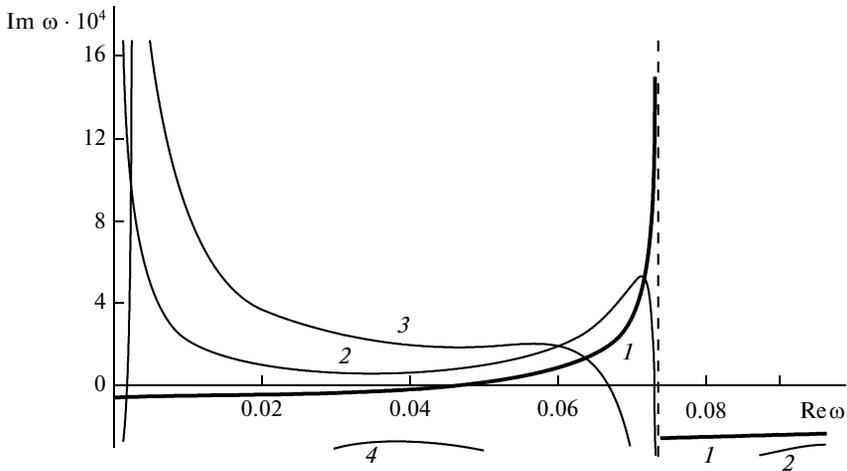
8. Примеры. Резюмируем полученное в предыдущем разделе. В случае обобщенно-выпуклого профиля пограничного слоя сверхзвуковые колебания пластины стабилизируются, а дозвуковые — дестабилизируются. В случае профиля с обобщенной точкой перегиба в дозвуковой части слоя при $\delta < \delta_1$ сверхзвуковые колебания усиливаются быстрее, чем в однородном потоке, а при $\delta > \delta_2$ — затухают; дозвуковые колебания всегда затухают.

Рассмотрим обобщенно-выпуклый профиль ускоряющегося течения, соответствующий $\beta = 2.0$ (профиль 1 на фиг. 3). Результаты расчетов Ω показаны на фиг. 7. Как видно, при увеличении толщины δ пограничного слоя $\text{Im } \omega$ для сверхзвуковых возмущений уменьшается и становится отрицательным. В то же время дозвуковые возмущения дестабилизируются пограничным слоем.

На фиг. 8 показаны аналогичные расчеты для $\beta = -0.199$ (профиль 5 на фиг. 3). Как видно, при $\delta < \delta_1$ неустойчивость сверхзвуковых возмущений существенно усиливается: $\text{Im } \omega$ для растущих возмущений увеличивается, а затухающие возмущения становятся растущими. Если же $\delta > \delta_2$ (кривая 4 на фиг. 8), то сверхзвуковые возмущения полностью стабилизируются. Дозвуковые возмущения остаются затухающими, так как обобщенная точка перегиба соответствует $u_0 \approx 1.07M_\infty > M_\infty - 1$.



Фиг. 7. Кривая Ω для профиля 1 (фиг. 3). Вертикальная штриховая линия соответствует переходу через скорость звука, $c = M_\infty - 1$: 1–4 – $\delta = 0, 0.5, 1, 2$



Фиг. 8. Кривая Ω для профиля 5 (фиг. 3). Вертикальная штриховая линия соответствует переходу через скорость звука, $c = M_\infty - 1$: 1–4 – $\delta = 0, 0.5, 1, 2$

Заключение. Исследовано влияние пограничного слоя, образующегося на поверхности пластины, на устойчивость волн в безграничной пластине и на одномодовый флаттер пластины больших, но конечных размеров.

В случае обобщенно-выпуклых профилей (характерных для ускоряющегося течения) сверхзвуковые колебания пластины стабилизируются, а дозвуковые – дестабилизируются.

В случае профилей с обобщенной точкой перегиба, лежащей в дозвуковой части слоя (характерных для однородных или замедляющихся течений), сверхзвуковые возмущения дестабилизируются при $\delta < \delta_1$ и стабилизируются при $\delta > \delta_2$; дозвуковые возмущения затухают.

Исследована связь между влиянием пограничного слоя на устойчивость пластины и устойчивостью самого пограничного слоя. Приведен пример устойчивых пограничных слоев, для которых усиление колебаний пластины можно сделать сколь угодно быстрым.

Работа поддержана грантами РФФИ (№ 10-01-00256 и 11-01-00034).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Веденеев В.В.* Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155–169.
2. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247 с.
3. *Веденеев В.В.* Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 2. С. 169–178.
4. *Веденеев В.В., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Колотников М.Е.* Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 161–175.
5. *Miles J.W.* On panel flutter in the presence of a boundary layer // J. Aero/Space Sci. 1959. V. 26. № 2. P. 81–93, 107 = *Майлс Дж.* О флаттере панелей с учетом пограничного слоя // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1959. № 4. С. 97–122.
6. *Dowell E.H.* Generalized aerodynamic forces on a flexible plate undergoing transient motion in a shear flow with an application to panel flutter // AIAA Journal. 1971. V. 9. № 5. P. 834–841. = *Дауэлл Е.* Обобщенные аэродинамические силы, действующие на упругую пластину при ее нестационарном движении в потоке со сдвигом, применительно к исследованию флаттера панели // Ракетн. техн. и космонавтика. 1971. Т. 9. № 5. С. 80–88.
7. *Куликовский А. Г.* Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
8. *Lees L., Lin C.C.* Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. NASA TN 1115. 1946. 83 p.
9. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
11. *Lees L., Reshotko E.* Stability of the compressible laminar boundary layer // J. Fluid Mech. 1962. V. 12. Pt 4. P. 555–590.
12. *Веденеев В.В.* О высокочастотном флаттере пластины // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 163–172.
13. *Miles J.* Stability of inviscid shear flow over a flexible boundary // J. Fluid Mech. 2001. V. 434. P. 371–378.

Москва

Поступила в редакцию
11.V.2011