ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2013, т. 281, с. 149–161

УДК 533.6.013.42

Связанный флаттер упругой пластины в потоке газа с пограничным слоем[1]

В. В. Веденеев[2]

Поступило в сентябре 2012 г.

Исследуется устойчивость упругой пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, с учетом пограничного слоя, образующегося на поверхности пластины. Задача решается в двух постановках. В первой пластина имеет большую, но конечную длину и исследуется связанный вид флаттера (влияние пограничного слоя на другой, одномодовый, вид флаттера изучалось ранее). Во второй постановке пластина считается безграничной и исследуется характер ее неустойчивости (абсолютная или конвективная). В обоих случаях неустойчивость определяется точкой ветвления корней дисперсионного уравнения, и математическое исследование единое. Доказано, что неустойчивость в однородном потоке газа ослабляется пограничным слоем, но не может быть полностью подавлена, а в случае, когда в однородном потоке пластина устойчива, пограничный слой приводит к ее дестабилизации.

DOI: 10.1134/S037196851302012X

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической теории гидродинамической устойчивости обычно рассматривается устойчивость течений жидкости или газа вдоль недеформируемых поверхностей. Необходимость стабилизации ламинарных течений породила ряд работ по изучению устойчивости течений на гибких поверхностях [1–5]. Было показано, что упругие и демпфирующие свойства поверхности качественно меняют вид нейтральной кривой, а также могут менять характер неустойчивости с конвективной на абсолютную и при определенном сочетании этих свойств могут затянуть ламинарно-турбулентный переход. В случае сверхзвуковых течений газа на гибкой поверхности появляется еще один вид неустойчивости — панельный флаттер, который опасен не столько турбулизацией течения, сколько возникающими интенсивными вибрациями обтекаемой конструкции. Это явление хорошо известно в авиации и изучалось в многочисленных работах начиная с 1950-х годов. До недавнего времени был известен один вид панельного флаттера — так называемый *связанный тип флаттера*, который возникает из-за связанности двух собственных мод пластины через поток газа. В [6] асимптотическим методом [7, 8] было доказано, что в случае широких пластин существует другой вид панельного флаттера — так называемый *одномодовый флаттер*, который возникает при малых сверхзвуковых скоростях потока и который не был замечен ранее из-за чрезмерных упрощений в аэродинамической части задачи. Позже существование одномодового флаттера было подтверждено численно [9] и экспериментально [10].

В подавляющем большинстве исследований панельного флаттера пограничный слой, образующийся на поверхности, не учитывался, а в нескольких работах, посвященных влиянию

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00256, 11-01-00034) и гранта Президента РФ (проект НШ-1303.2012.1).

[2]Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vasily@vedeneev.ru

пограничного слоя [11–13], рассматривались лишь конкретные профили скорости и температуры, поскольку эти работы были посвящены моделированию экспериментов [14, 15]. Случай произвольного профиля, определенного из задачи внешнего обтекания, исследован асимптотическим методом [7] в [16] для одномодового флаттера пластины. В настоящей статье рассматривается влияние пограничного слоя на связанный вид флаттера.

Как показано в [6], связанный вид флаттера пластины конечной ширины вызван точкой ветвления корней дисперсионного уравнения. Известно, что такие точки ветвления также обусловливают абсолютную неустойчивость безграничной системы, т.е. в данном случае безграничной пластины в потоке газа. Поэтому все результаты, полученные в данной работе для связанного флаттера пластин конечных размеров, автоматически переносятся на абсолютную неустойчивость безграничной пластины.

2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Постановка задачи и допущения аналогичны [16]. В двумерной постановке рассматривается устойчивость упругой пластины, подверженной растяжению с заданной растягивающей силой, обтекаемой с одной стороны плоскопараллельным потоком вязкого газа (нарастанием пограничного слоя пренебрегается), как показано на рис. 1. Пластина имеет конечную ширину и вделана в безграничную недеформируемую плоскость $z = 0$. Поток газа занимает область $z > 0$, зависимости невозмущенной скорости u_0 и температуры T_0 от z считаются заданными и, вообще говоря, должны определяться из задачи обтекания летательного аппарата или другой конструкции, панелью обшивки которого является рассматриваемая пластина.

В качестве модели пластины возьмем классическую модель малых прогибов Кирхгофа–Лява. Уравнения для возмущений газа — система линеаризованных уравнений Навье–Стокса, аналогичная уравнению Орра–Зоммерфельда в несжимаемой жидкости. В настоящей работе, как и в [16], будем считать число Рейнольдса R большим, тогда решения указанной системы приближаются решениями предельного невязкого уравнения при $R \to \infty$ — сжимаемого уравнения Рэлея. Также будем считать длины волн возмущений много большими толщины пограничного слоя δ.

Сделаем два замечания о применимости этих предположений. Во-первых, ламинарные пограничные слои в сверхзвуковых течениях часто наблюдаются экспериментально при числах Рейнольдса, вычисленных по толщине слоя, вплоть до порядков 10^5, т.е. при достаточно больших R, чтобы возмущения можно было описывать в невязком приближении. В частности, такие слои наблюдаются в течениях с градиентом давления, охлаждением поверхности или отсосом потока через нее [17, гл. 5]. Если же пограничный слой турбулентный, но характерные частоты пульсаций превышают частоту растущих колебаний пластины, то уравнения ламинарного течения можно использовать как первое приближение с соответствующими осредненными профилями скорости и температуры.

Во-вторых, решения вязкой системы при $R \to \infty$ приближаются решениями уравнения Рэлея не везде, а только в секторе комплексной плоскости z с углом $4\pi/3$ с вершиной $z = z_c$, в которой $u_0(z_c) = c$; здесь $c = \omega/k$ — фазовая скорость (рис. 2) [18]. В затемненном секторе решение вязкой системы имеет характер решения Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ), т.е.

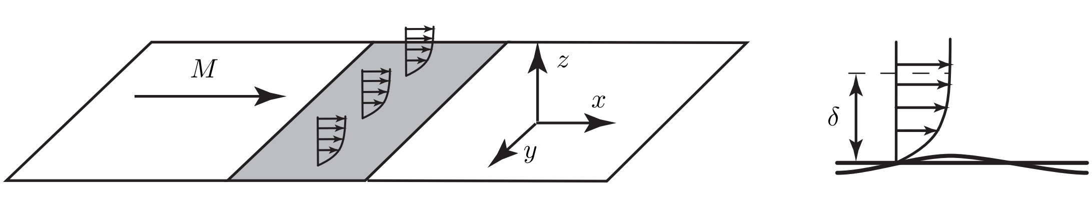

Рис. 1. Пластина в потоке газа с пограничным слоем

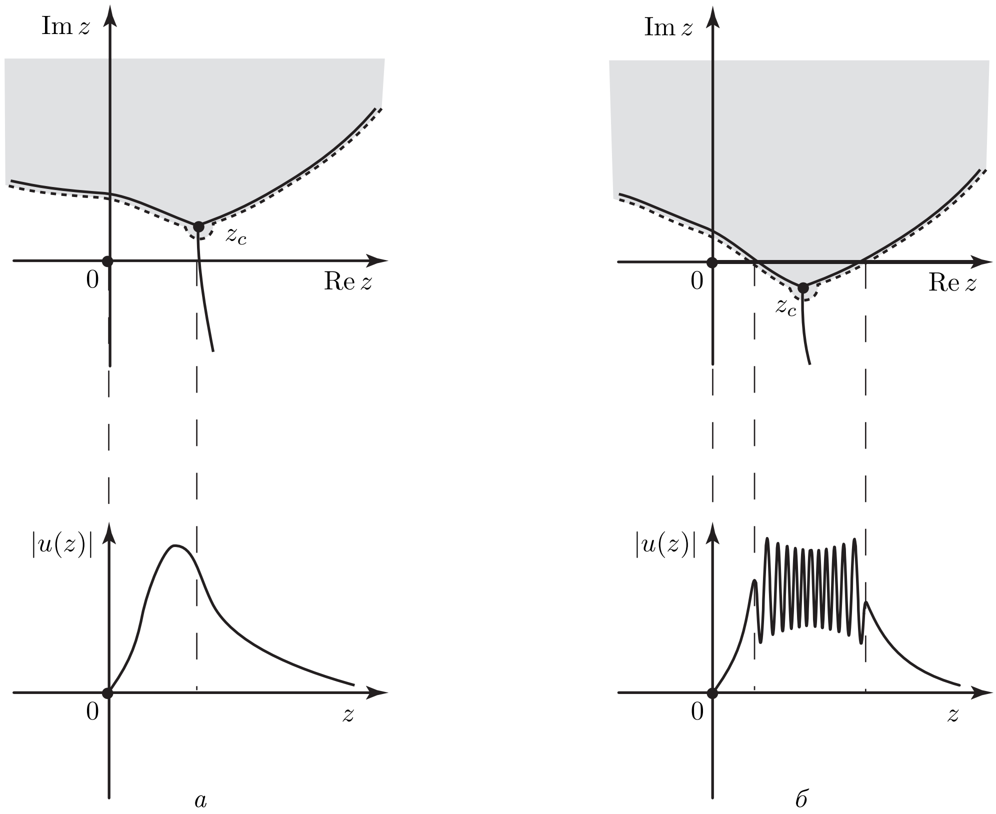

Рис. 2. Верхние части рисунка: линии Стокса и область экспоненциального поведения вязкого решения, если z_c лежит выше (a) и ниже ($б$) вещественной оси. Нижние части рисунка: видимое поведение возмущений при "физических" вещественных z в обоих случаях

$u(z) \sim g(z)\exp(\sqrt{iR}f(z))$. Это свойство порождает "правило обхода Линя": если $\operatorname{Im} z_c \le 0$ и ВКБ-сектор захватывает часть вещественной полуоси $z \ge 0$, не включающую $z = 0$, то невязкое решение можно аналитически продолжать из точки $z = 0$ (где ставятся граничные условия) в $z = +\infty$ (где также ставятся граничные условия) только с выходом в комплексную плоскость и обходом точки z_c снизу. Если вещественная полуось $z \ge 0$ в ВКБ-сектор не попадает (например, $\operatorname{Im} z_c > 0$), то невязкое решение можно аналитически продолжать вдоль вещественной оси z. Если же сама точка $z = 0$ попадает в ВКБ-сектор, то невязкое приближение применять нельзя, поскольку невозможно корректное выполнение граничных условий при $z = 0$. Мы будем считать, что $u_0'(z) > 0$ во всем течении, тогда, если z_c лежит в некоторой окрестности вещественной полуоси $z \ge 0$, положение z_c в комплексной плоскости z качественно совпадает с положением c в своей комплексной плоскости.

При этих предположениях в [16] было выведено дисперсионное уравнение для возмущений безграничной связанной системы пластина–поток, зависящих от x и t как $e^{i(kx-\omega t)}$:

$$\mathcal{D}(k,\omega) = \bigl(Dk^4 + M_{\mathrm{w}}^2k^2 - \omega^2\bigr) - \mu\left(\left(\frac{(M_\infty k-\omega)^2}{\sqrt{k^2-(M_\infty k-\omega)^2}}\right)^{-1} + \delta\left(\int\limits_0^1 \frac{T_0(\eta)\,d\eta}{(u_0(\eta)-c)^2} - 1\right)\right)^{-1} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь k и ω — волновое число и частота волны, безразмерные параметры D, M_{w} — жесткость и параметр, характеризующий натяжение пластины, M_∞, μ, δ — соответственно число Маха основного течения, отношение плотности потока к плотности материала пластины, толщина пограничного слоя (обезразмеренная на толщину пластины). Функции $u_0(\eta)$ и $T_0(\eta)$ описывают зависимость скорости и температуры невозмущенного потока от вертикальной координаты

$\eta = z/\delta$. Параметр μ считается малым, поскольку на практике он имеет порядок от 10^{-5} до 10^{-3}.

Исследование будем проводить асимптотическим методом глобальной неустойчивости [7]. Корни дисперсионного уравнения $k_j(\omega)$, пронумерованные в порядке убывания $\operatorname{Im} k_j$ при $\operatorname{Im}\omega \gg 1$, разбиваются на две группы: к первой относятся такие корни, что $\operatorname{Im} k_j(\omega) > 0$ при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$, $j = 1,\dots,s$; ко второй группе — такие, что $\operatorname{Im} k_j(\omega) < 0$ при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$, $j = s+1,\dots,N$. Первая группа описывает волны, движущиеся слева направо, вторая — справа налево. В [7] получено уравнение, описывающее предельное множество собственных значений конечной системы (в данном случае пластины) ширины L при $L \to \infty$ в виде

$$\min_{j=1,\dots,s} \operatorname{Im} k_j(\omega) = \max_{j=s+1,\dots,N} \operatorname{Im} k_j(\omega).$$

Это уравнение не зависит от граничных условий, заданных на концах пластины (поскольку сюда входят решения дисперсионного уравнения для безграничной пластины), и описывает кривую Ω в комплексной плоскости ω, вокруг которой концентрируются собственные значения конечной пластины в потоке газа. Если часть этой кривой лежит в области $\operatorname{Im}\omega > 0$, то пластина больших, но конечных размеров неустойчива, так как найдется ее собственная частота, лежащая в окрестности этой части Ω.

При $\delta = 0$ имеется четыре корня (2.1): k_1 и k_2 относятся к первой группе, k_3 и k_4 — ко второй. Кривая Ω состоит из двух частей [6]. Первая (Ω_1) определяется уравнением $\operatorname{Im} k_2(\omega) = \operatorname{Im} k_3(\omega)$ и соответствует одномодовому флаттеру пластины. Вторая (Ω_2) задается уравнением $\operatorname{Im} k_2(\omega) = \operatorname{Im} k_4(\omega)$ и соответствует связанному флаттеру. Она оканчивается точкой ветвления $k_2(\omega) = k_4(\omega)$, в которой достигается максимум $\operatorname{Im}\omega$. Эта точка ветвления также приводит к абсолютной неустойчивости безграничной пластины. Ниже изучается влияние пограничного слоя на эту точку ветвления.

3. УПРОЩЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

При отсутствии пограничного слоя ($\delta = 0$) точка ветвления $k(\omega)$, отвечающая за связанный флаттер конечной пластины и абсолютною неустойчивость безграничной пластины, удовлетворяет условию $|\omega| \ll |k|$, а именно $k \sim \mu^{1/3}$, $\omega \sim \mu^{2/3}$ [6]. Ниже будет доказано, что те же порядки сохраняются и при $\delta \neq 0$, что позволяет упростить дисперсионное уравнение (2.1). Во-первых, в первом слагаемом в скобках при μ можно пренебречь ω по сравнению с $M_\infty k$, т.е. заменить

$$\frac{(M_\infty k - \omega)^2}{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}} \quad \to \quad -i\frac{M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}k.$$

Выбор ветви квадратного корня был обоснован в [6].

Во-вторых, можно упростить интегральное слагаемое. Для этого заметим, что в интересующей нас точке ветвления $c = \omega/k \sim \mu^{1/3}$. Поскольку в силу условия прилипания для невозмущенного потока $u_0(0) = 0$, точка η_c, где $u_0(\eta_c) = c$, приближенно выражается так: $\eta_c \approx c/u_0'(0) \sim \mu^{1/3}$. Эта точка является полюсом подынтегрального выражения и лежит в малой окрестности конца отрезка интегрирования $\eta = 0$. Следовательно, основной вклад в интеграл даст эта окрестность. Для вычисления разложим профили пограничного слоя в ряд Тейлора в окрестности $\eta = \eta_c$:

$$T_0(\xi) = T_{00} + T_{01}\xi + \dots, \qquad u_0(\xi) = c + u_{01}\xi + \frac{1}{2}u_{02}\xi^2 + \dots, \qquad \xi = \eta - \eta_c.$$

Здесь T_{0n} и u_{0n} суть n-е производные функций в критической точке. Имеем

$$\frac{T_0(\xi)}{(u_0(\xi)-c)^2} = \frac{T_{00} + T_{01}\xi + \dots}{\left(u_{01}\xi + \frac{1}{2}u_{02}\xi^2 + \dots\right)^2} = \frac{T_{00}}{u_{01}^2}\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{u_{01}^2}\left(T_{01} - T_{00}\frac{u_{02}}{u_{01}}\right)\frac{1}{\xi} + \text{рег. чл.} \tag{3.1}$$

После интегрирования (3.1) главный член интегрального слагаемого в дисперсионном уравнении есть

$$\int\limits_{-\eta_c}^{1-\eta_c} \frac{T_{00}}{u_{01}^2}\,\frac{1}{\xi^2}\,d\xi = -\frac{T_{00}}{u_{01}^2}\,\frac{1}{\xi}\bigg|_{-\eta_c}^{1-\eta_c} = -\frac{T_{00}(\eta_c)}{u_{01}^2(\eta_c)}\left(\frac{1}{1-\eta_c}+\frac{1}{\eta_c}\right) \to -\frac{T_0(0)}{u_0'(0)}\,\frac{1}{c}$$

при $c \to 0$.

Таким образом, при малых μ дисперсионное уравнение (2.1) можно упростить следующим образом:

$$\mathcal{D}(k,\omega) = \bigl(Dk^4 + M_{\mathrm{w}}^2k^2 - \omega^2\bigr) - \mu\left(i\,\frac{\sqrt{M_\infty^2-1}}{M_\infty^2}\,\frac{1}{k} - \delta\,\frac{T_0(0)}{u_0'(0)}\,\frac{k}{\omega}\right)^{-1} = 0. \tag{3.2}$$

Нетрудно заметить, что при указанных выше порядках k и ω оба слагаемых в скобках при μ имеют один порядок $\mu^{-1/3}$.

Далее удобно переписать (3.2) в виде

$$\mathcal{D}(k,\omega) = \bigl(Dk^4 + M_{\mathrm{w}}^2k^2 - \omega^2\bigr) - \frac{\mu\omega k}{ia\omega - \delta bk^2} = 0, \tag{3.3}$$

где для краткости введены параметры

$$a = \frac{\sqrt{M_\infty^2-1}}{M_\infty^2} > 0, \qquad b = \frac{T_0(0)}{u_0'(0)} > 0.$$

Седловые точки решений (3.3) $\omega(k)$ (они же точки ветвления $k(\omega)$) даются условием $\partial\mathcal{D}/\partial k = 0$, т.е.

$$4Dk^3 + 2M_{\mathrm{w}}^2k - \frac{\mu\omega(ia\omega + \delta bk^2)}{(ia\omega - \delta bk^2)^2} = 0. \tag{3.4}$$

Вместо (3.3) для вычисления точек ветвления будем использовать эквивалентное ему уравнение, полученное умножением (3.3) на 4 и вычитанием (3.4), умноженного на k:

$$2M_{\mathrm{w}}^2k^2 - 4\omega^2 + \frac{\mu\omega k(-3ia\omega + 5\delta bk^2)}{(ia\omega - \delta bk^2)^2} = 0. \tag{3.5}$$

Итак, точки ветвления $k(\omega)$ — решения системы (3.4), (3.5). Вообще говоря, не все эти решения удовлетворяют условию непопадания в ВКБ-сектор точки $z = 0$ (рис. 2), т.е. некоторые из них требуют учета вязкости газа в уравнениях для возмущений при сколь угодно больших числах Рейнольдса. Нельзя исключить, что такие точки ветвления могут давать абсолютную неустойчивость, как в работе [4], где она обусловлена слиянием волны Толлмина–Шлихтинга, порожденной пограничным слоем, и волны, порожденная пластиной. Однако из-за сравнительно медленного роста волн Толлмина–Шлихтинга по сравнению с ростом колебаний при флаттере можно предположить, что и эта абсолютная неустойчивость слабая по сравнению с флаттером. Поэтому в этой работе мы ограничимся частной задачей — исследованием влияния пограничного слоя на конкретную точку ветвления, в которой в однородном потоке сливаются волны, порожденные пластиной, и которая ответственна за связанный тип флаттера конечной пластины и абсолютную неустойчивость безграничной пластины в однородном потоке газа. Ниже будет видно, что эта точка ветвления удовлетворяет условию $\operatorname{Im} c > 0$, т.е. ее изучение в невязком приближении корректно.

Отбор точек ветвления, отвечающих за неустойчивость, будем проводить с помощью “топопривязки”. А именно, выбрав некоторые конкретные параметры задачи и построив численно линии уровня $\operatorname{Im}\omega(k)$ или $\operatorname{Re}\omega(k)$, отметим седловые точки, в которых сливаются ветви из разных групп. Далее, изменяя параметры задачи, достаточно следить только за положением отмеченных точек ветвления (что часто можно сделать аналитически), поскольку топология линий уровня при не слишком большом изменении параметров не меняется. В случае, если происходит бифуркация точек ветвления и соответствующее изменение топологии линий уровня, топопривязку нужно провести заново, но опять лишь для конкретного набора параметров. В качестве параметров, для которых будет проводиться топопривязка, возьмем

$$D = 23.9, \qquad M_\infty = 1.5, \qquad \mu = 0.00012, \tag{3.6}$$

соответствующие алюминиевой пластине в потоке воздуха на высоте 3 км.

Обсудим разбиение корней (3.3) по группам. При $\delta = 0$ имеется четыре корня $k(\omega)$, по два корня в каждой группе: $\operatorname{Im} k_{1,2}(\omega) \to +\infty$, $\operatorname{Im} k_{3,4}(\omega) \to -\infty$ при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$. Они при больших $|\omega|$ близки к корням (3.3) с $\mu = 0$, т.е. к корням дисперсионного уравнения пластины в вакууме. При $\delta \neq 0$ появляются еще два корня, один стремится к $+i\infty$, другой к $-i\infty$ при $\operatorname{Im}\omega \to +\infty$, при больших $|\omega|$ они близки к нулям знаменателя дроби в (3.3). Первый корень будем обозначать $k_{\mathrm{bl}+}(\omega)$, второй — $k_{\mathrm{bl}-}(\omega)$. Теперь каждая группа состоит из трех корней: k_1, k_2, $k_{\mathrm{bl}+}$ и k_3, k_4, $k_{\mathrm{bl}-}$.

Исследование положения точек ветвления достаточно вести в полуплоскости $\operatorname{Re}\omega \geq 0$, поскольку частоте ω, отраженной относительно мнимой оси, соответствует решение (3.3) $k(\omega)$, также отраженное относительное мнимой оси. Физически эти отраженные решения описывают одну и ту же волну.

4. ПЛАСТИНА В ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ

При $\delta = 0$ система (3.4), (3.5) сводится к

$$\begin{gathered} 4Dk^3 + 2M_{\mathrm{w}}^2 k + \frac{i\mu}{a} = 0, \\ 2M_{\mathrm{w}}^2 k^2 - 4\omega^2 + 3\frac{i\mu}{a}k = 0, \end{gathered} \tag{4.1}$$

которая исследована аналитически в [6]. Приведем здесь результаты этих исследований.

При $M_{\mathrm{w}} = 0$ (отсутствие натяжения) в плоскости k имеются три точки ветвления, которым соответствуют $\operatorname{Re}\omega \geq 0$, топопривязка показана на рис. 3, *а*. Первая точка

$$k^* = \Big(\frac{\mu}{4Da}\Big)^{1/3} e^{-i\pi/6}, \qquad \omega^* = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{\mu}{a}\Big)^{2/3}\frac{1}{(4D)^{1/6}}e^{i\pi/6}$$

отвечает за глобальную неустойчивость пластины конечной длины, поскольку в ней сливаются ветви k_2 и k_4 из разных групп. Эта глобальная неустойчивость — причина связанного типа флаттера пластины в однородном потоке. Эта же точка отвечает за абсолютную неустойчивость безграничной пластины, поскольку через нее проходит деформированный контур интегрирования. Вторая точка

$$k^{**} = \Big(\frac{\mu}{4Da}\Big)^{1/3} e^{-5i\pi/6}, \qquad \omega^{**} = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{\mu}{a}\Big)^{2/3}\frac{1}{(4D)^{1/6}}e^{-i\pi/6}$$

образована слиянием ветви k_3 и ветви, образованной в первой точке. Она, очевидно, не приводит к неустойчивости. Третья точка

$$k^{***} = \Big(\frac{\mu}{4Da}\Big)^{1/3} i, \qquad \omega^{***} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Big(\frac{\mu}{a}\Big)^{2/3}\frac{1}{(4D)^{1/6}}i$$

образована слиянием ветвей k_1 и k_2 и не имеет отношения к неустойчивости, так как в безграничном случае контур интегрирования через нее не проходит, а в случае конечной пластины в ней сливаются ветви из одной группы волн.

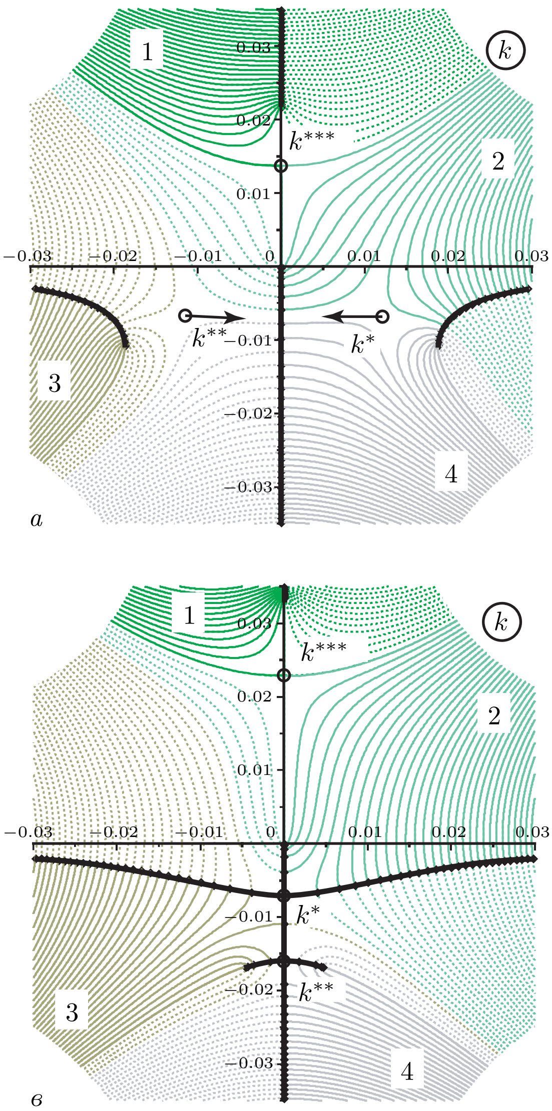

Рис. 3. Линии уровня $\mathrm{Re}\,\omega(k) = \mathrm{const} \geq 0$ в комплексной плоскости k при параметрах (3.6): $M_{\mathrm{w}} < M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}}$ (*а*); $M_{\mathrm{w}} = M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}}$ (*б*); $M_{\mathrm{w}} > M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}}$, ω^{**} вещественно (*в*); $M_{\mathrm{w}} > M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}}$, ω^{**} чисто мнимое (*г*). Сплошные линии — образы $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, пунктирные — $\mathrm{Im}\,\omega < 0$. Жирные кривые — линии уровня $\mathrm{Im}\,\omega = 0$, $\mathrm{Re}\,\omega \geq 0$. Цифрами показаны индексы ветви, отображающей сектор $\mathrm{Re}\,\omega > 0$, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ в область, содержащую этот индекс. Точки ветвления $k(\omega)$ показаны кружками, стрелками показаны направления движения этих точек при увеличении M_{w}

При увеличении M_{w}, пока

$$M_{\mathrm{w}} < M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Big(\frac{\mu}{a}\Big)^{1/3} D^{1/6},$$

частоты ω^* и ω^{**} приближаются к вещественной оси, но остаются в тех же четвертях комплексной плоскости, что и при $M_{\mathrm{w}} = 0$.

При $M_{\mathrm{w}} = M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}}$ происходит бифуркация (рис. 3, *б*): первая и вторая точки ветвления сливаются на вещественной оси:

$$\omega^* = \omega^{**} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Big(\frac{\mu}{a}\Big)^{2/3} \frac{1}{D^{1/6}},$$

и при $M_{\mathrm{w}} > M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}}$ остаются вещественными. В плоскости k слияние происходит на мнимой оси:

$$k^* = k^{**} = -\frac{i}{2}\left(\frac{\mu}{Da}\right)^{1/3},$$

после слияния обе точки остаются чисто мнимыми. Топопривязка (рис. 3, *в*) показывает, что за устойчивость отвечает та точка, которой соответствует меньшее $|k|$, ее будем по-прежнему обозначать k^*. Поскольку соответствующая частота вещественна, при $M_{\mathrm{w}} > M_{\mathrm{w}}^{\mathrm{cr}}$ неустойчивость безграничной пластины становится конвективной, а в конечной пластине связанный вид флаттера исчезает (возможность одномодового флаттера при этом остается [6]).

При дальнейшем увеличении M_{w} происходит еще одна бифуркация — движение ω^{**} по вещественной оси до 0 и слияние с отраженной относительно мнимой оси точкой ветвления (эта бифуркация связана только со вторым уравнением (4.1), т.е. происходит только в плоскости ω). После этого ω^{**} движется по мнимой оси и остается на ней при сколь угодно больших M_{w}. Эта перестройка показана на рис. 3, *г*.

Третья точка ветвления ω^{***} ни при каких M_{w} не взаимодействует с другими точками ветвления и по-прежнему не имеет отношения к вопросу устойчивости.

5. ПЛАСТИНА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ НАТЯЖЕНИЯ

Сначала рассмотрим случай $M_{\mathrm{w}} = 0$, тогда исследование положения точки ветвления удается провести аналитически. Перенесем в (3.4) и (3.5) слагаемое с μ в правую часть и разделим одно уравнение на другое. Тогда в получившееся уравнение k и ω входят только в виде комбинации $\lambda = k^2/(i\omega)$:

$$D\lambda^2 = \frac{a + \delta b\lambda}{3a - 5\delta b\lambda},$$

или

$$G(\lambda) = 5D\delta b\lambda^3 - 3Da\lambda^2 + \delta b\lambda + a = 0. \tag{5.1}$$

Как только это кубическое уравнение решено, ω и k легко находятся. Для этого перепишем (3.5) в виде

$$4\frac{\omega^2}{k} = \mu i\beta(\lambda), \qquad \beta(\lambda) = \frac{3a - 5\delta b\lambda}{(a - \delta b\lambda)^2}.$$

Теперь, решая систему

$$4\frac{\omega^2}{k} = \mu i\beta(\lambda), \qquad \frac{k^2}{\omega} = i\lambda,$$

окончательно находим точки ветвления:

$$\omega = \left(\frac{-i\mu^2\lambda\beta^2(\lambda)}{16}\right)^{1/3}, \qquad k = -\frac{4i\omega^2}{\mu\beta(\lambda)}.$$

В выражении для ω при каждом λ три значения кубического корня дают три разные точки ветвления. Поскольку (5.1) имеет три решения λ, всего имеется девять различных точек ветвления. Все они удовлетворяют условию $k \sim \mu^{1/3}$, $\omega \sim \mu^{2/3}$, следовательно, упрощения, сделанные в дисперсионном уравнении при малых μ, корректны.

Рассмотрим решения (5.1) и отберем точки ветвления, отвечающие за неустойчивость. Для этого удобно качественно изучать решения (5.1) графически. При $\delta = 0$ имеется два вещественных решения (5.1): $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$ (рис. 4). Из частот ω нас интересуют лежащие в правой полуплоскости. Решению λ_1 соответствует частота ω^*, ответственная за связанный тип

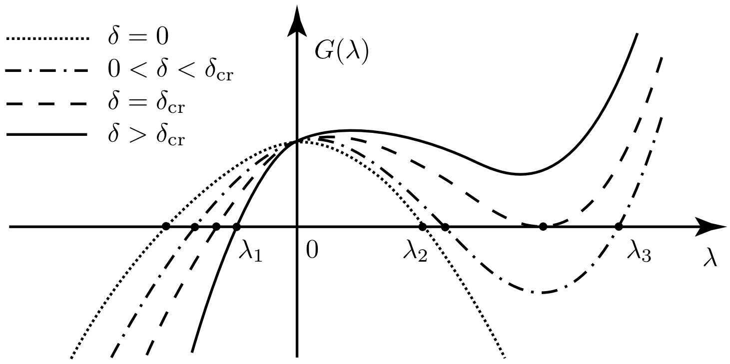

Рис. 4. График $G(\lambda)$ при различных значениях δ

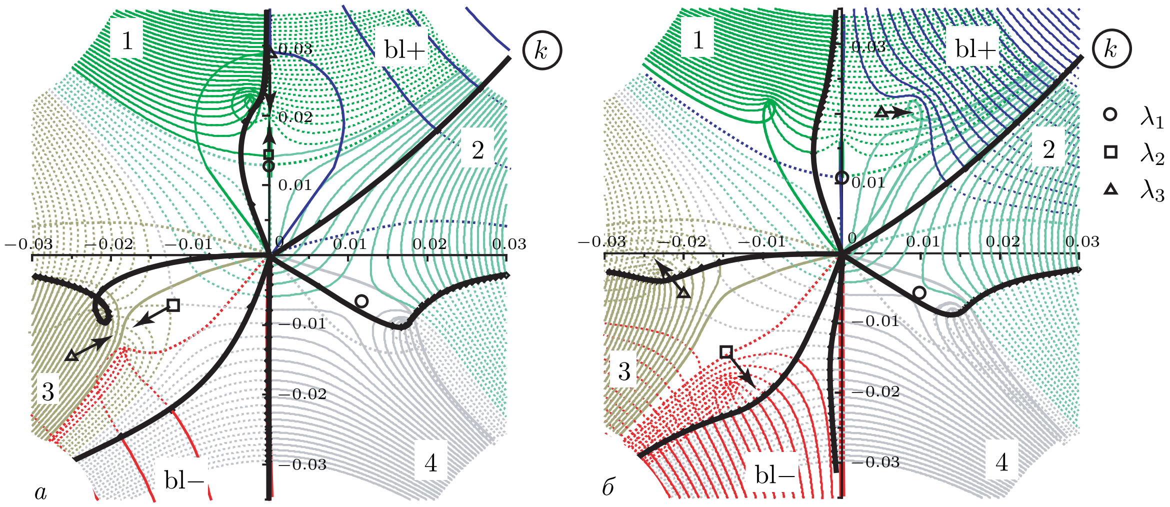

Рис. 5. Линии уровня $\operatorname{Re}\omega(k) = \text{const} \geq 0$ в комплексной плоскости k при параметрах (3.6), $M_{\text{w}} = 0$: до бифуркации, $\delta = 0.2$ (*а*); после бифуркации, $\delta = 1.2$ (*б*). Сплошные линии — образы $\operatorname{Im}\omega > 0$, пунктирные — $\operatorname{Im}\omega < 0$. Жирные кривые — линии уровня $\operatorname{Im}\omega = 0$, $\operatorname{Re}\omega \geq 0$. По периметру показаны индексы ветви, отображающей четверть $\operatorname{Re}\omega > 0$, $\operatorname{Im}\omega > 0$ в область, содержащую этот индекс. Точки ветвления $k(\omega)$, соответствующие λ_1, λ_2, λ_3, показаны кружками, квадратами и треугольниками соответственно, стрелками показаны направления движения этих точек при увеличении δ

флаттера пластины конечной длины и за абсолютную неустойчивость безграничной пластины, и ω^{***}, не имеющая отношения к неустойчивости. Решению λ_2 соответствует ω^{**}, имеющая отрицательную мнимую часть, и ω^{***}.

При малых $\delta \neq 0$ появляется еще одно решение $\lambda_3 > 0$ (рис. 4), причем $\lambda_3 \sim 1/\delta$ при $\delta \to 0$. Этому решению соответствуют две точки ветвления: в одной сливаются ветви k_1 и $k_{\text{bl}+}$, в другой — k_3 и $k_{\text{bl}-}$, что устанавливается топопривязкой (рис. 5, *а*). Как видно, эти точки не имеют отношения к неустойчивости.

Всем трем решениям λ_j, пока они остаются вещественными, соответствует $\beta(\lambda_j) > 0$, $j = 1, 2, 3$.

С увеличением δ решение λ_2 увеличивается, λ_3 уменьшается, и при $\delta = \delta_{\text{cr}}$ происходит бифуркация решений (5.1) — слияние λ_2 и λ_3, после чего они становятся комплексно сопряженными (рис. 4). При параметрах (3.6) $\delta_{\text{cr}} \approx 0.89$. Других бифуркаций λ нет, как и бифуркаций ω, поскольку $\beta(\lambda_j) \neq 0, \infty$. Таким образом, единственная возможная бифуркация положений точек ветвления — слияние λ_2 и λ_3. После слияния индексом “2” для определенности будем обозначать корень с $\operatorname{Im}\lambda_2 > 0$.

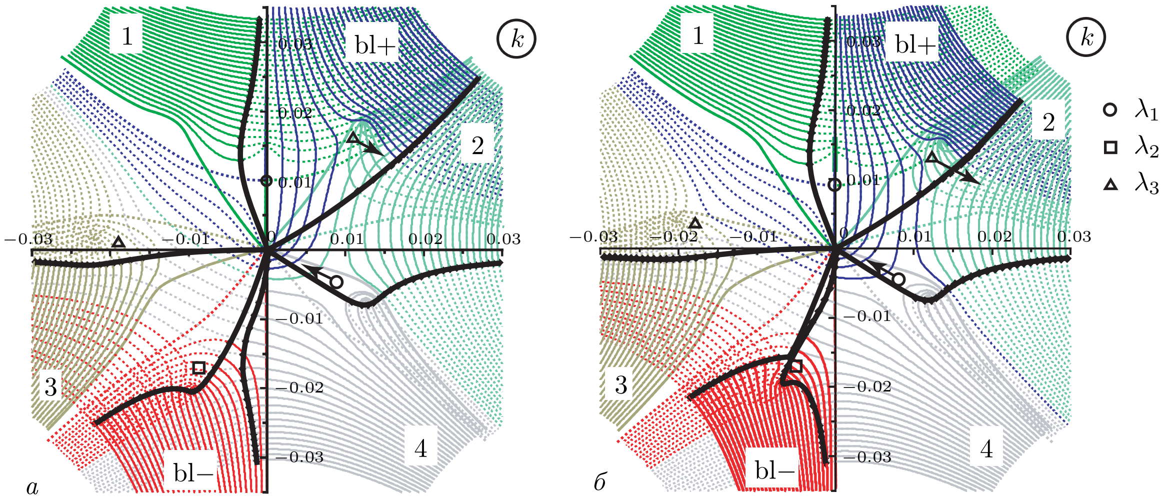

Рис. 6. Линии уровня $\mathrm{Re}\,\omega(k) = \mathrm{const} \geq 0$ в комплексной плоскости k при параметрах (3.6), $M_{\mathrm{w}} = 0$: до "переключения", $\delta = 2.2$ (*а*); после "переключения", $\delta = 3.0$ (*б*). Обозначения те же, что на рис. 5

Топопривязка точек ветвления после бифуркации показана на рис. 5, *б*. В точке ветвления, соответствующей λ_2, сливаются ветви k_4 и $k_{\mathrm{bl}-}$, в двух точках, соответствующих λ_3, k_3 сливается с k_4 и k_2 с $k_{\mathrm{bl}+}$. По-прежнему эти точки не имеют отношения к неустойчивости.

При любом $\delta \geq 0$ решение λ_1 остается вещественным и отрицательным, $\beta(\lambda_1)$ — вещественным и положительным. Бифуркаций соответствующих точек ветвления не происходит. В результате при наличии пограничного слоя точка ветвления ω^*, ответственная за неустойчивость, всегда сохраняет положительность мнимой части.

Докажем, что $\mathrm{Im}\,\omega^*$ монотонно убывает с ростом δ, т.е.

$$(\lambda\beta^2(\lambda))'_\delta > 0$$

при $\lambda = \lambda_1$. Достаточно рассмотреть случай $D = a = b = 1$, общий случай сводится к нему линейным преобразованием λ и δ. Сначала вычислим

$$\frac{d\lambda}{d\delta} = -\frac{\partial G/\partial\delta}{\partial G/\partial\lambda} = -\frac{5\lambda^3 + \lambda}{15\delta\lambda^2 - 6\lambda + \delta}.$$

Далее, пользуясь определением $\beta(\lambda)$, находим

$$(\lambda\beta^2(\lambda))'_\delta = \frac{3 - 5\delta\lambda}{(1 - \delta\lambda)^2}\left[\lambda'(3 - 5\delta\lambda) + \frac{2\lambda}{1 - \delta\lambda}(\delta\lambda)'(1 - 5\delta\lambda)\right].$$

При $\lambda = \lambda_1 < 0$ множитель при квадратных скобках положителен. Первое слагаемое в скобках положительно. Кроме того,

$$(\delta\lambda)'_\delta = \lambda + \delta\lambda' = \frac{\lambda^2(10\delta\lambda - 6)}{15\delta\lambda^2 - 6\lambda + \delta} < 0,$$

т.е. второе слагаемое в скобках также положительно. Утверждение доказано.

Итак, в отсутствие натяжения пограничный слой ослабляет неустойчивость (монотонно уменьшает $\mathrm{Im}\,\omega^*$), но не может ее полностью подавить ($\mathrm{Im}\,\omega^* > 0$).

При дальнейшем увеличении δ в точке ветвления ω^* сливаются ветви k_2 и k_4 лишь до некоторого δ, после чего в ней сливаются ветви $k_{\mathrm{bl}+}$ и k_4 (рис. 6). Это "переключение" с k_2

на $k_{\text{bl}+}$ происходит без бифуркации самих точек ветвления. При параметрах (3.6) это происходит при $\delta \approx 2.55$. При еще бóльших δ происходят и другие "переключения", однако их анализ не входит в задачи настоящего исследования. Важно лишь, что в этой точке всегда сливаются ветви из разных групп, следовательно, она по-прежнему приводит к неустойчивости, хотя эта неустойчивость определяется уже другими волнами. Таким образом, неустойчивость в том виде, в котором она имелась в однородном потоке газа, не имеет места при превышении указанной толщины пограничного слоя: абсолютная неустойчивость теперь порождается взаимодействием бегущей по потоку волны пограничного слоя и бегущей против потока волны пластины. Отметим, что такое взаимодействие, но в несжимаемой жидкости и с учетом вязкости изучалось в [4].

6. НАТЯНУТАЯ ПЛАСТИНА, ТОНКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

В отсутствие пограничного слоя ($\delta=0$) неустойчивость остается абсолютной при $M_{\text{w}} < M_{\text{w}}^{\text{cr}}$. При $M_{\text{w}} = M_{\text{w}}^{\text{cr}}$ происходит слияние двух точек ветвления, после чего точка, отвечающая за неустойчивость, имеет вещественную частоту. При наличии пограничного слоя система (3.4), (3.5) слишком сложна для аналитического исследования, однако можно выяснить влияние пограничного слоя на устойчивость при малых δ. Для этого линеаризуем (3.4), (3.5) относительно δ:

$$\begin{aligned} 4Dk^3 + 2M_{\text{w}}^2 k - \frac{\mu}{ia}\left(1 + 3\frac{\delta b k^2}{ia\omega}\right) &= 0, \\ 2M_{\text{w}}^2 k^2 - 4\omega^2 - \frac{3\mu k}{ia}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\delta b k^2}{ia\omega}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Пусть k_0, ω_0 — решения этой системы при $\delta = 0$. При малом δ положим $k = k_0 + \delta\widetilde{k}$, $\omega = \omega_0 + \delta\widetilde{\omega}$, подставим в (6.1) и линеаризуем. Будем иметь

$$12Dk_0^2\widetilde{k} + 2M_{\text{w}}^2\widetilde{k} + 3\mu\frac{b}{a^2}\frac{k_0^2}{\omega_0} = 0, \qquad 4M_{\text{w}}^2 k_0\widetilde{k} - 8\omega_0\widetilde{\omega} - \frac{3\mu\widetilde{k}}{ia} + \mu\frac{b}{a^2}\frac{k_0^3}{\omega_0} = 0,$$

отсюда

$$\widetilde{k} = -3\mu\frac{b}{a^2}\frac{k_0^2}{\omega_0}\frac{1}{12Dk_0^2 + 2M_{\text{w}}^2}, \qquad \widetilde{\omega} = \frac{\mu}{8\omega_0}\frac{b}{a^2}\frac{k_0^2}{\omega_0}\left(-3\frac{4M_{\text{w}}^2 k_0 + 3i\mu a^{-1}}{12Dk_0^2 + 2M_{\text{w}}^2} + k_0\right). \tag{6.2}$$

Вопрос о знаке $\operatorname{Im}\widetilde{\omega}$ теперь сводится к исследованию свойств точек ветвления при $\delta = 0$.

Главный интерес представляет случай $M_{\text{w}} > M_{\text{w}}^{\text{cr}}$, когда $\operatorname{Im}\omega_0 = 0$ и устойчивость определяется только знаком $\operatorname{Im}\widetilde{\omega}$. Заметим, что знаменатель дроби в формуле для $\widetilde{\omega}$ — это производная левой части первого уравнения (4.1). При $M_{\text{w}} = M_{\text{w}}^{\text{cr}}$, когда происходит слияние корней первого уравнения (4.1), этот знаменатель обращается в нуль. Легко доказать, что при $M_{\text{w}} > M_{\text{w}}^{\text{cr}}$ он при $k_0 = k_0^*$ положителен. Теперь рассмотрим числитель той же дроби. В момент слияния он также обращается в нуль, и при $M_{\text{w}} > M_{\text{w}}^{\text{cr}}$ он при $k_0 = k_0^*$ чисто мнимый с положительной мнимой частью. Поскольку $\operatorname{Im} k_0^* < 0$, все выражение в скобках имеет отрицательную мнимую часть, а значит, $\operatorname{Im}\widetilde{\omega}^* > 0$.

Таким образом, при $M_{\text{w}} > M_{\text{w}}^{\text{cr}}$ тонкий пограничный слой приводит к сдвигу точки ветвления ω^* с вещественной оси в верхнюю полуплоскость, т.е. к возникновению абсолютной неустойчивости безграничной пластины.

В случае пластины конечной длины эта точка ветвления также приводит к неустойчивости, однако при $M_{\text{w}} > M_{\text{w}}^{\text{cr}}$ в ней сливаются ветви k_2 и k_3, а не k_2 и k_4. Это значит, что тип этого флаттера одномодовый. Получаем, что, хотя связанного флаттера нет, левый конец асимптотической кривой Ω_1 [6], соответствующей одномодовому флаттеру, выходит в верхнюю полуплоскость благодаря влиянию пограничного слоя. Интересно, что этот выход в верхнюю полуплоскость не зависит от профиля пограничного слоя, в то время как положение Ω_1 при $|\omega| \gg \mu^{2/3}$ может под действием пограничного слоя сдвигаться как вверх, так и вниз, что определяется профилем пограничного слоя [16].

7. НАТЯНУТАЯ ПЛАСТИНА, ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В случае конечных δ исследование системы (3.4), (3.5) проводилось численно. На рис. 7 показаны результаты расчетов — положения точек ветвления для параметров (3.6) и $0 \le M_{\rm w} \le 0.25$ (для этих параметров $M_{\rm w}^{\rm cr} \approx 0.13$) при значениях $\delta = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$. Видно, что точка ω^* остается в верхней полуплоскости при всех рассчитанных δ. Топопривязка на рис. 8

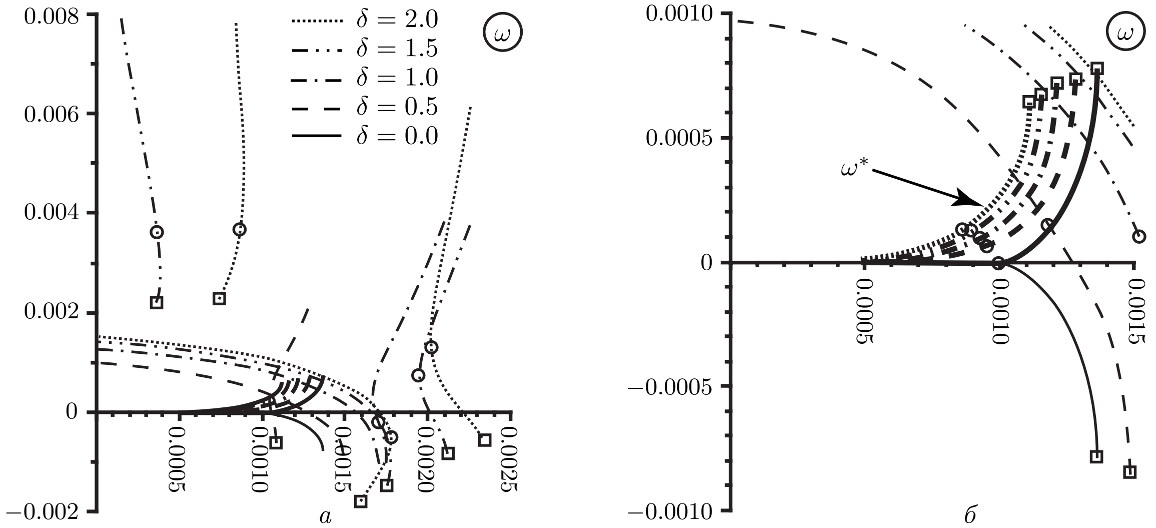

Рис. 7. Движение точек ветвления в плоскости ω при параметрах (3.6) и $0 \le M_{\rm w} \le 0.25$, $\delta = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ (*а*); увеличение области малых ω (*б*). Жирными кривыми показана частота ω^*. Квадратами показаны значения при $M_{\rm w} = 0$, кружками — при $M_{\rm w} = M_{\rm w}^{\rm cr} \approx 0.13$

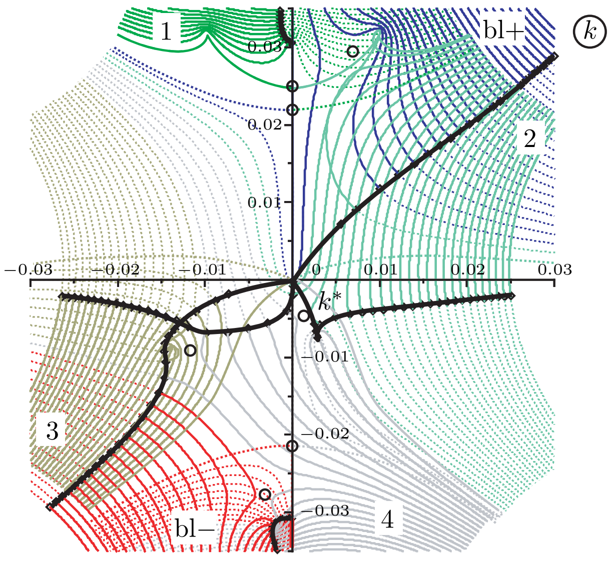

Рис. 8. Линии уровня $\mathrm{Re}\,\omega(k) = \mathrm{const} \ge 0$ в комплексной плоскости k при параметрах (3.6), $M_{\rm w} = 0.15$, $\delta = 1.5$. Обозначения те же, что на рис. 5

показывает, что это единственная точка ветвления, в которой сливаются корни из разных групп. Бифуркаций точек ветвления в этом диапазоне параметров не имеется.

Таким образом, неустойчивость, вызванная пограничным слоем, сохраняется и при конечных δ из исследованного диапазона параметров.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследован связанный флаттер пластины большой ширины в потоке газа с учетом пограничного слоя, а также характер неустойчивости безграничной пластины. При отсутствии натяжения и увеличивающейся толщине слоя пластина остается неустойчивой, но скорость роста возмущений уменьшается. При определенной толщине происходит “смена” характера волн, ответственных за неустойчивость: если в тонком пограничном слое, как и в однородном потоке, неустойчивость возникала из-за взаимодействия двух волн, порожденных пластиной, то в достаточно толстом слое волна, порожденная пластиной, взаимодействует с волной, порожденной пограничным слоем.

При достаточно большом натяжении, когда пластина в однородном потоке стабилизируется, пограничный слой приводит к ее дестабилизации независимо от профиля скорости и температуры потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1: Tollmien–Schlichting instabilities // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 465–510.
2. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 2: Flow-induced surface instabilities // J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 199–232.
3. *Савенков И.В.* Подавление роста нелинейных волновых пакетов упругостью обтекаемой поверхности // ЖВМиМФ. 1995. Т. 35, №1. С. 95–103.
4. *O. Wiplier, U. Ehrenstein* On the absolute instability in a boundary-layer flow with compliant coatings // Eur. J. Mech. B: Fluids. 2001. V. 20, N 1. P. 127–144.
5. *Miles J.* Stability of inviscid shear flow over a flexible boundary // J. Fluid Mech. 2001. V. 434. P. 371–378.
6. *Веденеев В.В.* Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. №5. С. 155–169.
7. *Куликовский А.Г.* Об устойчивости однородных состояний // ПММ. 1966. Т. 30, №1. С. 148–153.
8. *Куликовский А.Г.* О глобальной неустойчивости однородных течений в неодномерных областях // ПММ. 2006. Т. 70, №2. С. 257–263.
9. *Vedeneev V.V.* Panel flutter at low supersonic speeds // J. Fluids Struct. 2012. V. 29. P. 79–96.
10. *Веденеев В.В., Гувернюк С.В., Зубков А.Ф., Колотников М.Е.* Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. №2. С. 161–175.
11. *Dowell E.H.* Generalized aerodynamic forces on a flexible plate undergoing transient motion in a shear flow with an application to panel flutter // AIAA J. 1971. V. 9, N 5. P. 834–841.
12. *Dowell E.H.* Aerodynamic boundary layer effects on flutter and damping of plates // J. Aircr. 1973. V. 10, N 12. P. 734–738.
13. *Hashimoto A., Aoyama T., Nakamura Y.* Effects of turbulent boundary layer on panel flutter // AIAA J. 2009. V. 47, N 12. P. 2785–2791.
14. *Muhlstein L.,* Jr.*, Gaspers P.A.,* Jr.*, Riddle D.W.* An experimental study of the influence of the turbulent boundary layer on panel flutter: NASA TN D-4486. Moffett Field, CA: Ames Res. Center, NASA, 1968.
15. *Gaspers P.A.,* Jr.*, Muhlstein L.,* Jr.*, Petroff D.N.* Further results on the influence of the turbulent boundary layer on panel flutter: NASA TN D-5798. Moffett Field, CA: Ames Res. Center, NASA, 1970.
16. *Веденеев В.В.* Одномодовый флаттер пластины с учетом пограничного слоя // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. №3. С. 147–160.
17. *Гапонов С.А., Маслов А.А.* Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980.
18. *Drazin P.G., Reid W.H.* Hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.