

УДК 532.5

АБСОЛЮТНАЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ

© 2024 г. В. В. Веденеев*, Л. Р. Гареев**, Ю. С. Зайко***, Н. М. Экстер****

МГУ им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*e-mail: vasily@vedeneev.ru

**e-mail: gareev@imec.msu.ru

***e-mail: zayko@imec.msu.ru

****e-mail: exter@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 05.04.2024 г.

После доработки 10.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

Рассматривается семейство профилей скорости затопленной струи, которые являются в плоскопараллельном приближении абсолютно неустойчивыми. Профили задаются двумя параметрами, первый из которых отвечает за положение единственной точки перегиба на профиле, второй — за толщину сдвигового слоя. Реализован алгоритм определения длины участка локальной абсолютной неустойчивости струи с заданным входным профилем скорости — то есть расстояния, на котором абсолютная неустойчивость сменяется конвективной. Получена зависимость этой длины от параметров, задающих входной профиль. Аналитически получена связь между характеристиками локальной абсолютной неустойчивости, рассчитанной в плоскопараллельном приближении, и глобальной неустойчивостью струи, эволюционирующей в пространстве. Продемонстрирован входной профиль скорости, соответствующий достаточно большой длине зоны локальной абсолютной неустойчивости, при котором имеет место глобальная неустойчивость пространственно развивающейся струи. Таким образом, показана возможность глобальной неустойчивости плоских затопленных струй, имеющих специальные распределения скорости.

Ключевые слова: струйное течение, линейная теория устойчивости, абсолютная неустойчивость, глобальная неустойчивость.

DOI: 10.31857/S1024708424040016, **EDN:** OYTFCO

Затопленной называется струя, вытекающая в среду с тем же агрегатным состоянием, что и сама струя. Подобные струи часто встречаются в науке и технике, а потеря ими устойчивости и переход к турбулентности существенно влияют на такие явления как горение, перемешивание, химические реакции. Устойчивость струйных течений может зависеть от различных факторов, например, от скорости потока, плотности, вязкости, температуры струи и окружающей жидкости и др. При определённых специфических условиях струйные течения могут быть ламинарными на больших расстояниях вниз по потоку [1–4] в то время как при обычных условиях они теряют устойчивость и становятся турбулентными на расстоянии в 1–2 ширины/диаметра выходного сечения. Управление затопленными струями и предсказание потери ими устойчивости представляют интерес в контексте фундаментальных и прикладных задач.

Неустойчивость плоскопараллельного потока жидкости бывает двух видов: конвективная и абсолютная. В случае конвективной неустойчивости малые возмущения со временем сносятся, нарастают вниз по потоку и, достигая определенного уровня, приводят к переходу к турбулентности. При этом достижение значительной амплитуды возмущений и переход к турбулентности нередко происходят по течению от места возникновения нарастающего возмущения. Как следствие, такое течение может иметь ламинарный участок большой длины [5]. Примерами конвективно неустойчивых течений могут служить плоскопараллельное течение Пуазейля [6, 7], и пограничный слой Блазиуса [6, 8]. В случае абсолютной неустойчивости возмущение нарастает неограниченно со временем в той точке пространства (течения), где оно возникло.

Ранее абсолютная неустойчивость струй с классическими профилями скорости и плотностью, не отличающейся от плотности окружающей среды, наблюдалась лишь при наличии противотечения на

границе [9]. Однако, для струй со сложными “неклассическими” профилями было обнаружено, что абсолютная неустойчивость без наличия противотечения возможна как для круглых [10], так и для плоских [11] струй.

Благодаря пространственной эволюции невозмущённого течения становится возможным существование глобальных собственных мод — то есть гармонических по времени возмущений, локализованных в пространстве (что невозможно в плоскопараллельных течениях). Более строго, под собственными модами будем понимать возмущения, удовлетворяющие нулевым условиям во входном сечении струи и при бесконечном удалении от неё во всех направлениях, и зависящие от времени как $e^{-i\omega t}$. Если какая-либо собственная мода является растущей во времени, то область её локализации представляет собой зону генерации самовозбуждающихся колебаний. Существование растущих собственных мод будем называть глобальной неустойчивостью [12, 13], где термин “глобальный” подчёркивает нелокальный (неплоскопараллельный) анализ устойчивости. Интерес к созданию глобально неустойчивых течений связан с тем, что области самовозбуждения колебаний при их нелинейном развитии могут привести к возникновению регулярных вторичных течений или хаотических турбулентных течений, что может использоваться при создании различных устройств и технологий для интенсификации перемешивания.

Хорошо известно [12, 13], что в эволюционирующих течениях с наличием двух пространственных волн (то есть описываемых дисперсионным уравнением второго порядка по волновому числу) для существования растущей глобальной собственной моды необходимо наличие зоны локальной абсолютной неустойчивости. Глобальной неустойчивостью течения, которая вызвана локальной абсолютной неустойчивостью, объясняется целый ряд явлений: возникновение дорожки Кармана в следе за цилиндром [14, 15], колебания и разрушение горячих струй [16], колебания следа за крыловыми профилями [17], распад на капли струй жидкости [18, 19] осесимметричные движения неньютоновской жидкости в неоднородных эластичных трубках [20].

Однако это условие не достаточно: чтобы возникли растущие глобальные колебания, зона локальной абсолютной неустойчивости в общем случае должна быть достаточно протяжённой, а инкремент роста достаточно большим. В противном случае окружающая зона конвективной неустойчивости “перевесит” абсолютную неустойчивость: возникающие в зоне абсолютной неустойчивости возмущения будут частично покидать её и уноситься вниз по потоку, что будет препятствовать росту таких возмущений в зоне зарождения. В результате все глобальные собственные моды будут затухающими, то есть в течении будут отсутствовать зоны порождения самовозбуждающихся колебаний, а вносимые растущие возмущения будут сноситься вниз по потоку.

В настоящей работе определяется длина участка локальной абсолютной неустойчивости плоской затопленной струи. В разд. 1 приводится математическая постановка задачи и даётся краткое описание алгоритма определения длины участка локальной абсолютной неустойчивости. Раздел 2 посвящён детальному описанию алгоритма. В разд. 3 описываются результаты расчётов для рассматриваемого семейства профилей скорости. В разд. 4 определяются характеристики зоны локальной абсолютной неустойчивости, приводящие к глобальной неустойчивости пространственно эволюционирующей струи; приведён пример параметров, при которых можно ожидать глобальную неустойчивость.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ставится задача разработки алгоритма определения длин участков локальной абсолютной неустойчивости плоских однонаправленных струй, задаваемых начальными профилями скорости, введёнными в [11] и определяемыми двумя параметрами ξ , ζ . Параметр ξ отвечает за положение точки перегиба на профиле скорости, параметр ζ определяет ширину сдвигового слоя струи (рис. 1). Ось x лежит в плоскости течения и направлена вниз по потоку, ось y перпендикулярна ей и лежит в плоскости течения.

Сначала численно моделируется установившееся течение и рассчитывается эволюция вниз по потоку начального профиля скорости струи, задаваемого парой параметров ξ , ζ . Затем на различных удалениях от начала струи проводится анализ типа неустойчивости профилей скорости путём поиска седловых точек на комплексной плоскости волнового числа ($\text{Re } \alpha$, $\text{Im } \alpha$). Таким образом ищется длина участка локальной абсолютной неустойчивости конкретной струи, определяемой параметрами начального профиля скорости ξ , ζ . Термин “локальная” используется в том смысле, что анализ характера неустойчивости проводится в плоскопараллельном приближении без учета изменения профиля скорости вдоль координаты x .

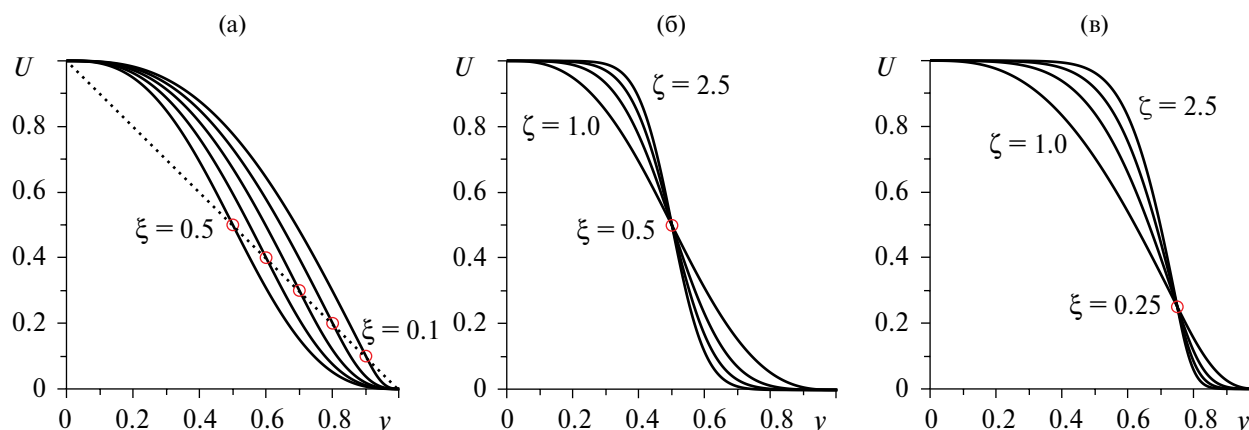


Рис. 1. Профили скорости, задаваемые парой параметров ξ, ζ : $\xi \leq 0.5, \zeta = 1$ (а), $\xi = 0.5, \zeta \geq 1$ (б), $\xi = 0.25, \zeta \geq 1$ (в). Красный круг обозначает точку перегиба.

Исследование и результаты излагаются в безразмерном виде, в качестве линейных масштабов скорости и длины берутся соответственно максимальная скорость $U_{\max}$ и половина ширины струи $h/2$. По этим параметрам в том числе вычисляется число Рейнольдса течения $R = 9000$. Такое значение R выбрано исходя из проведенных экспериментов на установке, создающей ламинарную плоскую струю воздуха толщиной $h = 0.1$ м с максимальной скоростью на оси струи $U_{\max} = 2.78$ м/с. По результатам текущей теоретической работы на данной установке планируется проведение экспериментов по созданию глобально неустойчивого течения.

Неустойчивость изучается в невязком приближении, так как проводится анализ струй при числе Рейнольдса, которое можно считать достаточно большим по следующей причине. В [11] проведён плоско-параллельный анализ неустойчивости с учётом вязкости и найдены критические числа Рейнольдса, разделяющие зоны конвективной и абсолютной неустойчивости, результаты теоретического анализа подтверждены прямым численным моделированием. Характерные критические R имеют порядок 1000, то есть на порядок ниже рассматриваемого в настоящей работе, что обосновывает использование невязкой теории устойчивости.

Таким образом, алгоритм состоит из следующих этапов:

- 1) параметризация начального профиля скорости: выбор пары параметров ξ, ζ ;
 - 2) ламинарный стационарный расчёт струи с заданным начальным профилем скорости;
 - 3) обработка результатов численного расчёта: снятие профилей скорости на различных удалениях вниз по потоку;
 - 4) анализ типа неустойчивости (конвективная/абсолютная) этих профилей скорости;
 - 5) определение расстояния, на котором абсолютная неустойчивость сменяется конвективной.
- Далее следует подробное описание каждого этапа.

2. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ УЧАСТКА ЛОКАЛЬНОЙ АБСОЛЮТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Семейство исследуемых профилей скорости

Задание начального профиля параметрами ξ, ζ проводилось с помощью сплайнов пятой степени, в соответствии с тем, как это делалось в [11]. Сначала рассмотрим случай $\zeta = 1$:

$$\tilde{U}_s(y) = \begin{cases} f(y), & 0 \leq y \leq y_0; \quad f(y) = a_5 y^5 + a_4 y^4 + a_3 y^3 + 1, \\ g(y), & y_0 \leq y \leq 1, \quad g(y) = b_5 (y-1)^5 + b_4 (y-1)^4 + b_3 (y-1)^3. \end{cases} \quad (2.1)$$

Исследуемый профиль имеет одну точку перегиба в заданной точке $y = y_0 = 1 - \xi$. Полиномы данного вида удовлетворяют граничным условиям:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad g(1) = g'(1) = g''(1) = 0.$$

Для определения коэффициентов полиномов задаются условия гладкости в точке склейки полиномов:

$$f(y_0) = g(y_0), \quad f'(y_0) = g'(y_0), \quad f''(y_0) = g''(y_0),$$

также имеются три условия в точке перегиба:

$$f(y_0) = \xi, \quad f'(y_0) = -2, \quad f''(y_0) = 0.$$

Таким образом, ξ является управляющим параметром точки перегиба профиля скорости: она находится в точке $y_0 = 1 - \xi$, а скорость в точке перегиба $U(y_0) = \xi$. Полученные графики показаны на рис. 1а.

Действие второго параметра ζ при $\zeta > 1$ заключается в увеличении градиента скорости в точке перегиба за счет уменьшения толщины сдвигового слоя струи, как показано на рис. 1б. Оно происходит за счет преобразования координаты y . Определим сплайн-функцию пятой степени $\tilde{y}(y)$ на $0 \leq y \leq 1$:

$$\tilde{y}(y) = \begin{cases} \phi(y), & 0 \leq y < y_0; \\ \psi(y), & y_0 < y \leq 1, \end{cases}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

$$\tilde{y}(0) = 0, \quad \tilde{y}(y_0) = y_0, \quad \tilde{y}(1) = 1;$$

$$\tilde{y}'(0) = v, \quad \tilde{y}'(y_0) = \zeta, \quad \tilde{y}'(1) = v;$$

$$\tilde{y}''(0) = 0, \quad \tilde{y}''(y_0) = 0, \quad \tilde{y}''(1) = 0;$$

где y_0 — точка перегиба профиля скорости, $\zeta \geq 1$ — управляющий параметр, и $v = 1 / \zeta^2$. После преобразования координат профиль скорости имеет вид

$$U(y) = U_s(\tilde{y}(y)),$$

где U_s — исходный сплайн-определённый профиль скорости.

Результирующий профиль контролируется обоими параметрами: ξ задаёт расположение точки перегиба, и $\zeta \geq 1$ определяет толщину слоя сдвига (рис. 1в).

2.2. Расчёты установившегося течения

Проводится ламинарный стационарный расчёт в CFD комплексе с заданным начальным профилем скорости. Система уравнений Навье—Стокса решается методом контрольных объёмов, реализованным в решателе Ansys CFX. Расчётная область показана на рис. 2. Рассматривается симметричная половина струи и области окружающего пространства, так как решается задача о плоском течении однонаправленной струи. В качестве граничного условия на входе (пунктирная линия на рис. 2) задаётся профиль продольной скорости — распределение скорости вдоль координаты y . На выходе задаётся атмосферное давление, на верхней и левой границах расчётной области — свободный вход/выход: нулевой нормальный градиент направления скорости и атмосферное давление, на нижней границе — условие симметрии. Длина расчётной области составляет 25, высота — 10.

Для моделирования плоского течения рассматривалась трёхмерная модель с одним слоем элементов в поперечном направлении и постановкой условий симметрии на боковых поверхностях. Использовались гексаэдральные элементы, общее количество которых составило 272130 (470×579 элементов вдоль осей x и y), в пределах основного струйного течения сетка сгущалась — в нем находилось 188000

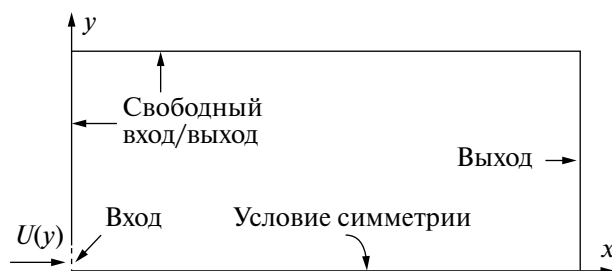


Рис. 2. Расчётная область для симметричной половины плоской однонаправленной затопленной струи.

(470×400) элементов. Вычисления проводились по пространственной схеме первого порядка с разностями против потока методом установления до снижения уровня максимальной по всем элементам безразмерной невязки до 10^{-6} . Для всех описываемых ниже расчётов достигнута сходимость по сетке и размеру расчётной области.

2.3. Обработка результатов CFD-расчёта. Анализ типа неустойчивости профилей скорости в струе на различных расстояниях от её начала

После завершения CFD-расчёта снимаются профили продольной скорости $U(y)$ на различных расстояниях от начала струи вниз по потоку с шагом $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 0.2$. Здесь $i = 0, \dots, N$, где N – номер первого профиля скорости, тип неустойчивости которого окажется конвективным. Для каждого профиля скорости проводится анализ линейной неустойчивости в невязком приближении. Используется плоско-параллельный подход, когда $u_x = U(y)$, $u_y = u_z = 0$. На невозмущённое движение накладываются возмущения в виде бегущих волн

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_x(y) \\ U'_y(y) \\ U'_z(y) \end{pmatrix} e^{i(\alpha x - \omega t)}. \quad (2.2)$$

Система уравнений Навье–Стокса линеаризуется около невозмущённого состояния с учётом того, что число Рейнольдса рассматриваемого течения велико: рассматривается предел $R \rightarrow \infty$. Таким образом получится уравнение Рэлея для компоненты возмущений $U'_y = \psi(y)$:

$$(U(y) - c) \left(\frac{d^2 \psi}{dy^2} - \alpha^2 \psi \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \psi = 0. \quad (2.3)$$

Здесь $c = \omega/\alpha$ – фазовая скорость, ω – частота, α – волновое число. Для симметричного профиля скорости величины $\psi(y)$ всегда представляют собой чётные и нечётные функции y . Граничные условия имеют следующий вид:

$$\frac{d\psi}{dy} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ для нечетной собственной функции,} \quad (2.4)$$

$$\psi = 0 \text{ при } y = 0 \text{ для четной собственной функции,} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\psi}{dy} + \alpha \psi = 0 \text{ при } y = \delta. \quad (2.6)$$

Поясним вывод условия (2.6). Предполагается, что вне струи среда неподвижна: $U(y) = 0$ при $y \geq \delta$. Общее решение уравнения Рэлея, которое в этой области представляет собой дифференциальное уравнение

второго порядка с постоянными коэффициентами, имеет вид $\psi = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}$ ($C_1, C_2 = \text{const}$, $\alpha \geq 0$), при этом, так как при $y \rightarrow \infty$ возмущения затухают, $C_1 = 0$. Для склейки возмущения во внешнем течении с возмущением в струе при $y = \delta$ необходимо, чтобы $d\psi / dy|_{y=\delta} = -\alpha\psi$.

Уравнение (2.3) с граничными условиями (2.4)–(2.6) представляет собой задачу на собственные значения $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$ при заданной частоте $\omega \in \mathbb{R}$ (то есть ищутся такие α , при которых задача имеет ненулевое решение). Для каждого зафиксированного α интегрирование (2.3) от 0 до δ проводится методом Рунге–Кутты с начальными условиями (2.4) и $\psi(0) = 1$, или (2.5) и $d\psi/dy(0) = 1$. Затем вычисляется выражение

$$\Psi(\alpha) = \frac{d\psi}{dy}(\delta) + \alpha\psi(\delta),$$

и методом секущих ищется нуль функции

$$\Psi(\alpha) = 0.$$

В расчётах принято $\delta = 1.2$, так как для всех рассматриваемых ниже профилей скорости с высокой точностью $U(y) \approx 0$ при $y > \delta$.

Отметим, что в случае нейтральных возмущений ($\text{Im } \alpha = 0$) уравнение Рэлея имеет сингулярность, лежащую на пути интегрирования вдоль оси y . Однако эта сингулярность исчезает в случае растущих возмущений. Поэтому результаты для нейтральных возмущений, приводимые ниже, получены как предел растущих возмущений при скорости роста, стремящейся к нулю, т.е. при $\text{Im } \alpha \rightarrow -0$. Данного ограничения можно было бы избежать при выборе пути интегрирования в комплексной плоскости y , обходящем сингулярность, как это сделано в [21], однако такой подход в настоящем исследовании не применялся, поскольку характер неустойчивости определяется седловой точкой, лежащей в области $\text{Im } \alpha < 0$, где данная проблема отсутствует.

В общем случае решение задачи с начальными данными о распространении локализованного возмущения содержит в себе компоненты и дискретного, и непрерывного спектра [22]. В рассматриваемой здесь задаче существует единственная растущая мода $\omega(\alpha)$ из дискретного спектра, поведение которой определяет асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) поведение возмущения $w(x, y, t)$ (здесь w – любая из компонент возмущения скорости), поэтому оно записывается в виде интеграла Фурье

$$w(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, y) e^{i(\alpha x - \omega(\alpha)t)} d\alpha. \quad (2.7)$$

Тип неустойчивости, т.е. стремление $w(x, y, t)$ к 0 или к ∞ при $t \rightarrow \infty$, определяется методом перевала [22] и сводится к анализу поведения линий уровня $\text{Im } \alpha = 0$ на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$. Для рассматриваемого семейства профилей на этой плоскости имеется седловая точка (α_s, ω_s) , через которую однозначно проводится контур интегрирования для интеграла Фурье (2.7) [10]. Отметим, что при $\text{Re } \alpha \rightarrow \pm\infty$ путь интегрирования совпадает с прямой $\text{Im } \alpha = 0$, причём $\text{Im } \omega(\alpha) < 0$. В этом случае асимптотика интеграла Фурье определяется величиной $\text{Im } \omega_s = \text{Im } \omega(\alpha_s)$ в седловой точке α_s на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ и, согласно методу перевала, имеет следующий вид:

$$w(x, y, t) \sim e^{i\theta} f(\alpha_s, y) \sqrt{\frac{2\pi}{|\omega''(\alpha_s)|}} \frac{e^{i(\alpha_s x - \omega_s t)}}{\sqrt{t}}, \quad (2.8)$$

где $\theta \in \mathbb{R}$. В случае абсолютной неустойчивости в седловой точке $\text{Im } \omega_s > 0$, в случае конвективной неустойчивости $\text{Im } \omega_s < 0$.

В качестве примера для струи с начальным профилем скорости, определяемым параметрами $\xi = 0.25$, $\zeta = 2$, на рис. 3а приведены профили скорости на расстояниях $x = 1, 2, 4, 6.6$. Построенные линии уровня $\text{Im } \omega = 0$ для $x = 1, 2, 4$ на рис. 3б соответствуют случаю абсолютной неустойчивости. Путь интегрирования и направления увеличения и уменьшения $\text{Im } \omega$ в окрестности седловой точки для этих случаев показаны на рис. 4а: величина $\text{Im } \omega$ в седловой точке положительна. В случае же конвективной неустойчивости ($x = 6.6$, сплошные кривые на рис. 3б) одна из линий уровня $\text{Im } \omega = 0$ непрерывно соединяет два нейтральных возмущения, и направления роста и уменьшения $\text{Im } \omega$ в окрестности седловой точки

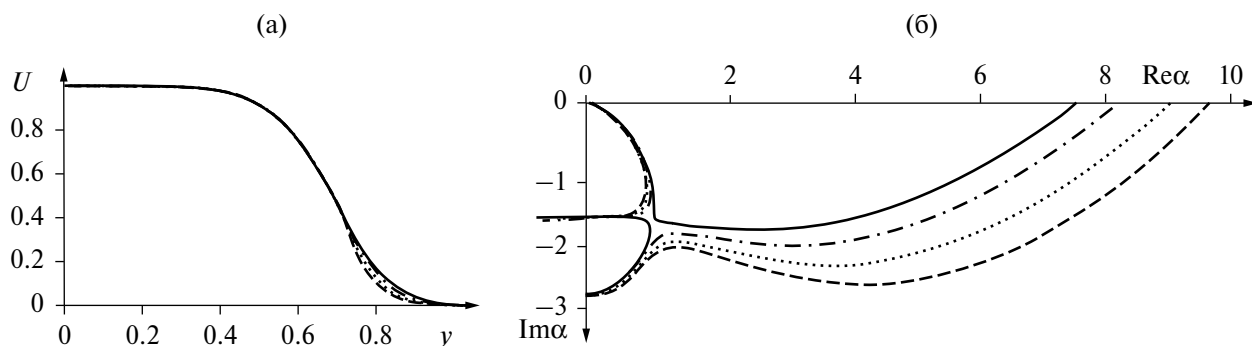


Рис. 3. Профили скорости (а) и соответствующие им линии уровня $\text{Im } \alpha = 0$ на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ для струи с параметрами $\xi = 0.25$, $\zeta = 2$ (б). Штриховыми кривыми обозначены профили скорости и линии уровня для $x = 1$, пунктирными для $x = 2$, штрих-пунктирными для $x = 4$, сплошными для $x = 6.6$.

таковы, что значение $\text{Im } \omega$ в седловой точке оказывается отрицательным (рис. 4б). Аналогичным образом, путём анализа расположения линий уровня $\text{Im } \omega = 0$ на комплексной плоскости волнового числа, определяется тип неустойчивости для каждого рассматриваемого профиля каждой из рассчитанных струй. Автоматизированный анализ выполнялся следующим образом.

1. Решается вышеописанная задача на собственные значения $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$ для вещественных частот $\omega \in (0; \omega_{\text{нейтр}}]$. Расчеты начинаются с $\omega = \omega_{\text{нейтр}}$, с последующим уменьшением ω . Получается правая (рис. 3б) линия уровня $\text{Im } \omega = 0$ в виде двумерного массива значений $\text{Re } \alpha$, $\text{Im } \alpha$.

2. Левая часть этой линии уровня (после прохода окрестности седловой точки при уменьшении ω) определяет характер неустойчивости. Из массива $\text{Im } \alpha$ вычисляется массив разностей $\text{Im } \alpha_{i+1} - \text{Im } \alpha_i$. По преобладанию в нём отрицательных или положительных чисел делается вывод, вниз или вверх уходит линия уровня после прохода окрестности седловой точки. В первом случае неустойчивость абсолютная (рис. 4а), во втором – конвективная (рис. 4б).

3. Пункты 1–2 выполняются для срезов профилей скорости, начальный вид которых определяется парой (ξ, ζ) , с шагом $\Delta x = 0.2$ до тех пор, пока характер неустойчивости не сменится с абсолютного на конвективный. Таким образом, для каждой пары (ξ, ζ) вычисляется координата вниз по потоку $x = L$, определяющая длину участка локальной абсолютной неустойчивости.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ЛОКАЛЬНОЙ АБСОЛЮТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТРУЙ

С помощью разработанного алгоритма был проведён анализ 600 профилей скорости струй, задаваемых различными парами (ξ, ζ) . Параметр ξ менялся в диапазоне $[0.025; 0.5]$ с шагом 0.025, параметр ζ – в диапазоне $[1.05; 2.5]$ с шагом 0.05. Результаты расчёта длины L участка локальной абсолютной неустойчивости приведены на рис. 5. Тёмно-синий цвет в заливке обозначает отсутствие участка локальной абсолютной неустойчивости, жёлтый цвет – область на плоскости ξ, ζ с наибольшей из полученных длиной. Для наиболее протяжённого участка $L \approx 7.6$.

В работе [11] для диапазона параметров $\xi \in [0.34, 0.5]$, $\zeta \in [1, 2.4]$ (без учёта эволюции профиля струи вниз по потоку) найдена граница абсолютной и конвективной неустойчивости – кривая, выше которой профили скорости абсолютно неустойчивы, ниже – неустойчивы конвективно. Эта кривая показана белой штриховой линией на рис. 5. Видно, что на заливке, полученной в настоящей работе, в области, ниже штриховой линии отсутствуют участки локальной абсолютной неустойчивости струй. Таким образом, этот результат находится в согласии с данными [11].

4. ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ, ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ВНИЗ ПО ПОТОКУ

Выше проводился локальный анализ неустойчивости струйного течения, который не учитывает пространственное “размытие” профиля скорости. Далее с учетом такого “размытия” проводится исследование глобальной неустойчивости рассматриваемого течения на основе построения и анализа модельного

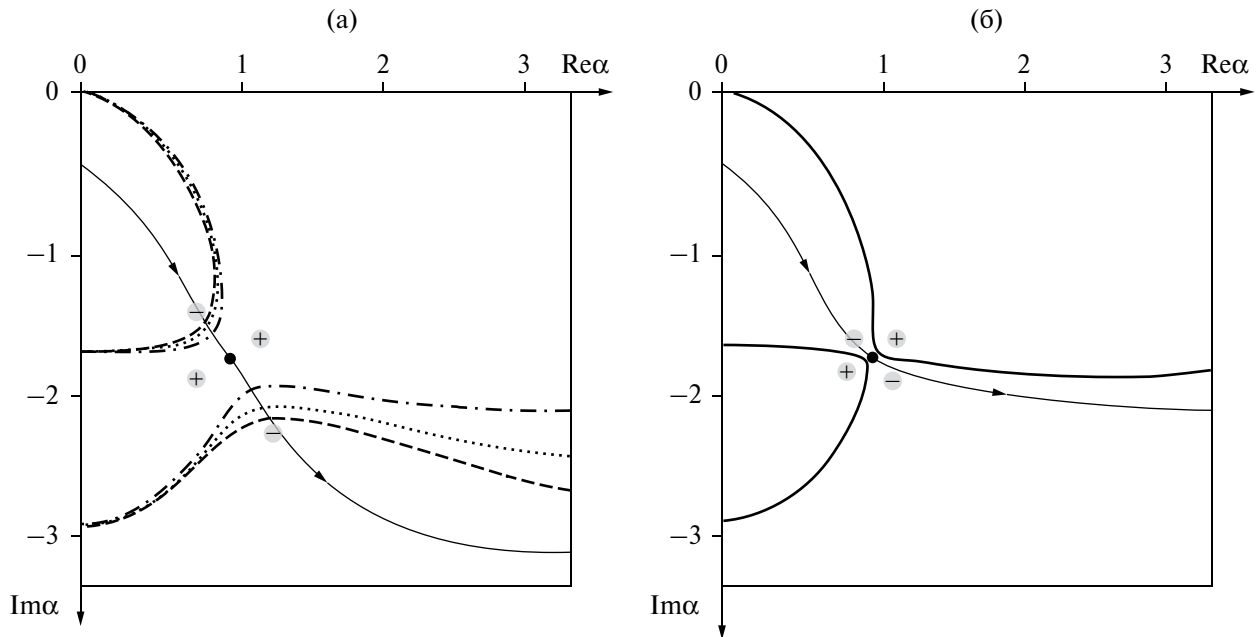


Рис. 4. Линии уровня $\text{Im } \omega = 0$ на плоскости $\alpha \in \mathbb{C}$ для случаев абсолютной (а) и конвективной (б) неустойчивости для профилей скорости струи на различных расстояниях от начала. Чёрная точка обозначает седловую точку. Знаками “ $\pm$ ” в серых кругах показаны направления уменьшения и увеличения $\text{Im } \omega$ в окрестности седловой точки. Тонкая линия со стрелками показывает путь интегрирования. Тип кривых соответствует рис. 3.

уравнения, которое отражает основные свойства исходного течения. А именно, глобальная собственная мода возникает как следствие локальной абсолютной неустойчивости [12, 13], а та, в свою очередь, объясняется слиянием двух волновых чисел $\alpha(\omega)$ в седловой точке, причём одно из них соответствует волне, движущейся вверх, другое — вниз по потоку [22] (направление волны определяется по знаку $\text{Im } \alpha$ при устремлении $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$). Тогда естественно предположить, что эти две волны определяют наличие глобальной неустойчивости. Рассмотрим дисперсионное уравнение с коэффициентами, зависящими от x , воспроизводящее при “заморозке” его коэффициентов на разных расстояниях вниз по потоку окрестность седловой точки функции $\omega(\alpha)$, которая определяет характер неустойчивости струи. По этому дисперсионному уравнению можно восстановить соответствующее ему дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. На основе точного решения этого уравнения ниже получен критерий, связывающий частоту глобальной собственной моды с характеристиками локальной абсолютной неустойчивости.

4.1. Модельное уравнение, описывающее локальную абсолютную неустойчивость

Следуя работе [23], рассмотрим линеаризованное уравнение Гинзбурга—Ландау для некоторой неизвестной функции $A(x, t)$ (например, она может быть одной из компонент возмущения скорости), описывающее две пространственные волны, и следовательно, имеющее второй порядок по x :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_0(x) \frac{\partial A}{\partial x} = \varkappa(x) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \mu(x) A, \quad (4.1)$$

где u_0 , $\varkappa$, μ — в общем случае комплекснозначные и зависящие от x функции. Для выбора этих функций такими, чтобы они воспроизводили поведение пространственных волн в окрестности седловой точки струи, сначала изучим локальные свойства модельного уравнения.

Для этого заморозим коэффициенты уравнения и рассмотрим решения в виде бегущих волн $A(x, t) = e^{i(\alpha x - \omega t)}$. Подстановка в (4.1) приводит к локальному дисперсионному уравнению

$$-i\omega + iu_0\alpha = -\varkappa\alpha^2 + \mu.$$

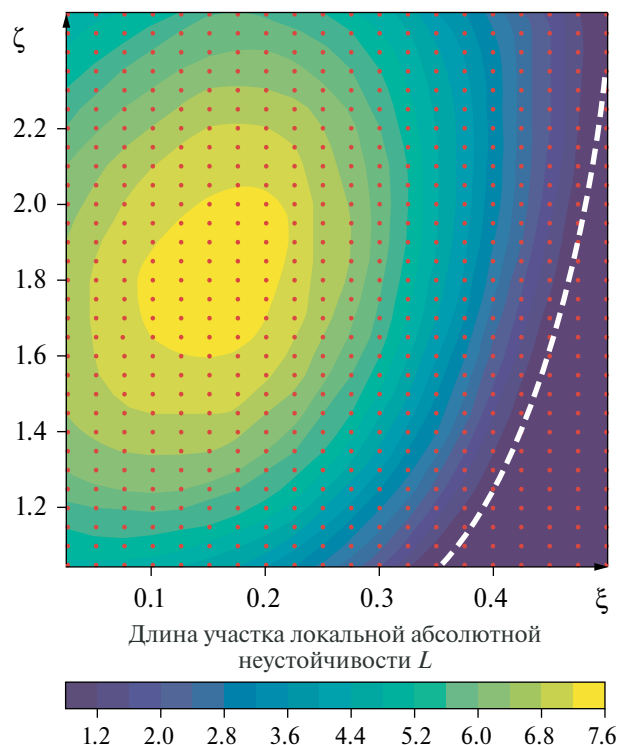


Рис. 5. Зависимость длины участка локальной абсолютной неустойчивости от параметров ξ , ζ . Красными точками обозначены рассмотренные профили скорости.

Данное уравнение можно переписать в виде

$$(\alpha - \alpha_s)^2 = \lambda(\omega - \omega_s) \Rightarrow \alpha_{1,2} = \alpha_s \pm \sqrt{\lambda(\omega - \omega_s)}, \quad (4.2)$$

где

$$\alpha_s = -\frac{i u_0}{2\kappa}, \quad \omega_s = -i \frac{u_0^2}{4\kappa} + i\mu, \quad \lambda = \frac{i}{\kappa}. \quad (4.3)$$

Очевидно, что частота $\omega = \omega_s$ есть точка ветвления комплексной функции $\alpha(\omega)$, то есть в ней происходит слияние двух пространственных волн, соответствующих двум волновым числам $\alpha(\omega)$. Эта точка является седловой точкой обратной функции $\omega(\alpha)$, которая по определению ищется как решение уравнения $d\omega/d\alpha = 0$ [24]. Параметры α_s и ω_s определяют положение точки взаимодействия, а параметром $\lambda = (\alpha - \alpha_s)^2 / (\omega - \omega_s)$ определяется поворот ($\text{Arg}\lambda$) и масштабирование ($|\lambda|$) окрестности седловой точки.

Для “эмуляции” седловой точки, полученной из решения задачи устойчивости струи, выберем параметры уравнения (4.2) α_s , ω_s , λ так, чтобы воспроизводилась картина, наблюдаемая в струе. Решая систему (4.3), находим:

$$\kappa = \frac{i}{\lambda}, \quad u_0 = -2 \frac{\alpha_s}{\lambda}, \quad \mu = -i\omega_s + \frac{u_0^2}{4\kappa} = -i\omega_s - i \frac{\alpha_s^2}{\lambda}.$$

Как показывают расчёты эволюции струи (см. разд. 4.3), при размытии профиля скорости положение седловой точки α_s , как и расположение ветвей в этой плоскости (определяемое параметром λ), меняются слабо. Также близкой к константе остаётся частота $\text{Re } \omega_s$. Однако, инкремент абсолютной неустойчивости падает с удалением от входного сечения струи, причём его уменьшение происходит близко к линейному закону при увеличении расстояния от начального сечения струи: $\text{Im } \omega_s(x) \approx a - bx$, $b > 0$. Учитывая всё вышеперечисленное, получаем, что

$$\varkappa \approx \text{const}, \quad u_0 \approx \text{const}, \quad \mu(x) \approx \mu_0 - \mu_1 x, \quad (4.4)$$

где

$$\mu_1 = b = -\frac{d\text{Im}\omega_s(x)}{dx} \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Таким образом, модельное уравнение, описывающее эволюцию локальных свойств, близкую к эволюции свойств струи, имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_0 \frac{\partial A}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (\mu_0 - \mu_1 x)A. \quad (4.6)$$

4.2. Собственные моды модельного уравнения

Рассмотрим собственные моды полученного уравнения (4.6), то есть решения, зависящие гармонически от времени и удовлетворяющие нулевым граничным условиям в начальном сечении струи и при удалении от него вниз по потоку:

$$A(x, t) = e^{-i\omega t} B(x), \quad B(0) = 0, \quad B(+\infty) = 0.$$

Получаем задачу на собственные значения для уравнения

$$\varkappa \frac{d^2 B(x)}{dx^2} - u_0 \frac{dB(x)}{dx} + (\mu_0 - \mu_1 x + i\omega) B(x) = 0.$$

Полученное уравнение простыми преобразования приводится к уравнению Эйри. А именно, сделаем замену $B(x) = e^{i\alpha_s x} C(x)$, где $\alpha_s = -iu_0 / (2\varkappa)$, и замену переменной x на новую переменную z :

$$x = \left(\frac{\varkappa}{\mu_1} \right)^{1/3} z + x_0, \quad x_0 = \frac{\mu_0 - \frac{u_0^2}{4\varkappa} + i\omega}{\mu_1}. \quad (4.7)$$

Получим уравнение Эйри

$$\frac{\partial^2 C(z)}{\partial z^2} - zC(z) = 0$$

с граничными условиями

$$C(z) = 0 \text{ при } z = -\frac{x_0}{(\varkappa / \mu_1)^{1/3}} \text{ и } z \rightarrow +\infty.$$

Ограничимся случаем

$$-\pi / 3 < \text{Arg}(\varkappa / \mu_1)^{1/3} < \pi / 3, \quad (4.8)$$

тогда стремление функции к нулю вдоль вещественной оси x эквивалентно (в силу свойств уравнения Эйри) такому стремлению вдоль вещественной оси z .

Решение уравнения Эйри, удовлетворяющее второму граничному условию — условию затухания вниз по потоку, — функция Эйри $C(z) = Ai(z)$. Удовлетворяя первому граничному условию — условию отсутствия возмущения в начальном сечении, — получаем

$$-\frac{x_0}{(\varkappa / \mu_1)^{1/3}} = \zeta_n \Rightarrow x_0 = -\zeta_n \left(\frac{\varkappa}{\mu_1} \right)^{1/3},$$

где ζ_n — нули функции Эйри (вещественные отрицательные числа). Отсюда с использованием (4.7) получаем спектр глобальных собственных частот ω_s^g

$$\omega_n^g = i \left(\mu_0 - \frac{u_0^2}{4\mathcal{K}} \right) + i \zeta_n \mu_1^{2/3} \mathcal{K}^{1/3} = \omega_s(0) + i \zeta_n \mu_1^{2/3} \mathcal{K}^{1/3}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Таким образом, условие роста n -й глобальной собственной моды $\text{Im } \omega_n^g > 0$ эквивалентно условию

$$\text{Im } \omega_s(0) > |\zeta_n| \mu_1^{2/3} \text{Re } \mathcal{K}^{1/3}, \quad (4.10)$$

т.е. инкремент локальной абсолютной неустойчивости начального профиля скорости должен превышать значение правой части полученного неравенства, которая, в свою очередь, зависит от μ_1 — скорости уменьшения этого инкремента вниз по потоку. Данное условие связывает локальные свойства абсолютной неустойчивости и глобальную неустойчивость эволюционирующего вниз по потоку течения. Поскольку наименьший по модулю ноль функции Эйри $\zeta_1 \approx -2.338$, то условие глобальной неустойчивости можно переписать в виде

$$\text{Im } \omega_s(0) > |\zeta_1| \mu_1^{2/3} \text{Re } \mathcal{K}^{1/3}. \quad (4.11)$$

Глобальные собственные моды модельного уравнения имеют вид

$$A_n(x, t) = e^{i\omega_n^g t} e^{i\alpha_s x} \text{Ai} \left(\left(\frac{\mu_1}{\mathcal{K}} \right)^{1/3} \left(x + \zeta_n \left(\frac{\mathcal{K}}{\mu_1} \right)^{1/3} \right) \right) \quad (4.12)$$

Рассмотрим пространственное распределение собственной моды, являющееся произведением двух функций пространственной координаты. Очевидно, что первый сомножитель $e^{i\alpha_s x}$ описывает пространственные колебания с волновым числом локальной седловой точки α_s , которые соответствуют асимптотике локализованного возмущения в плоскопараллельном приближении. Другими словами, эти колебания соответствуют локальной абсолютной неустойчивости течения. Второй сомножитель $\text{Ai}((\mu_1/\mathcal{K})^{1/3}(x + \zeta_n(\mathcal{K}/\mu_1)^{1/3}))$ описывает огибающую, обеспечивающую выполнение условий затухания при $x = 0$ и $x \rightarrow +\infty$, причём характерная длина волны огибающей связана с параметром μ_1 , характеризующим скорость уменьшения инкремента абсолютной неустойчивости (4.5). Чем медленнее происходит пространственная эволюция невозмущённого течения, тем меньше μ_1 , то есть тем меньше отличие глобальной собственной частоты от частоты абсолютной неустойчивости в начальном сечении струи $\omega_s(0)$, и тем более растянутой в пространстве становится собственная функция. Таким образом, полученное решение (4.12) описывает моды, возникающие из локальной абсолютной неустойчивости, имеющей место на конечном пространственном интервале.

4.3. Пример глобально неустойчивой струи

Выше в разд. 3 проведены расчёты эволюции плоских затопленных струй. Покажем, что характеристики абсолютной неустойчивости могут быть достаточны для возникновения глобальной неустойчивости эволюционирующей струи. Далее для анализа выбран начальный профиль скорости с параметрами $\xi = 0.1$, $\zeta = 1.6$. Его эволюция вниз по потоку, а также положение точки перегиба на профиле показано на рис. 6. Можно отметить, что увеличение скорости в точке перегиба на начальных этапах развития струи происходит очень быстро, что вызвано большой кривизной профиля на краю струи, но замедляется ниже по потоку по мере “расплыва” профиля и уменьшения его кривизны.

На рис. 7 показаны отображения линий $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega_s(x)$ в комплексную плоскость α при нескольких выбранных профилях скорости, соответствующих нескольким координатам x развивающейся струи. Как видно, положение седловой точки слабо зависит от x : относительное изменение $\text{Re } \alpha_s$ составляет 2%, относительное изменение $\text{Im } \alpha_s$ и $\text{Re } \omega_s$ — 10%. Ориентация подходящих к ней ветвей $\alpha(\omega)$, определяемая $\text{Arg } \lambda$, меняется более существенно, однако $\text{Arg } \lambda$ связан с величиной θ в (2.8) и не определяет асимптотику локализованных возмущений в плоскопараллельном случае. Величина $|\lambda|$, определяющая асимптотику

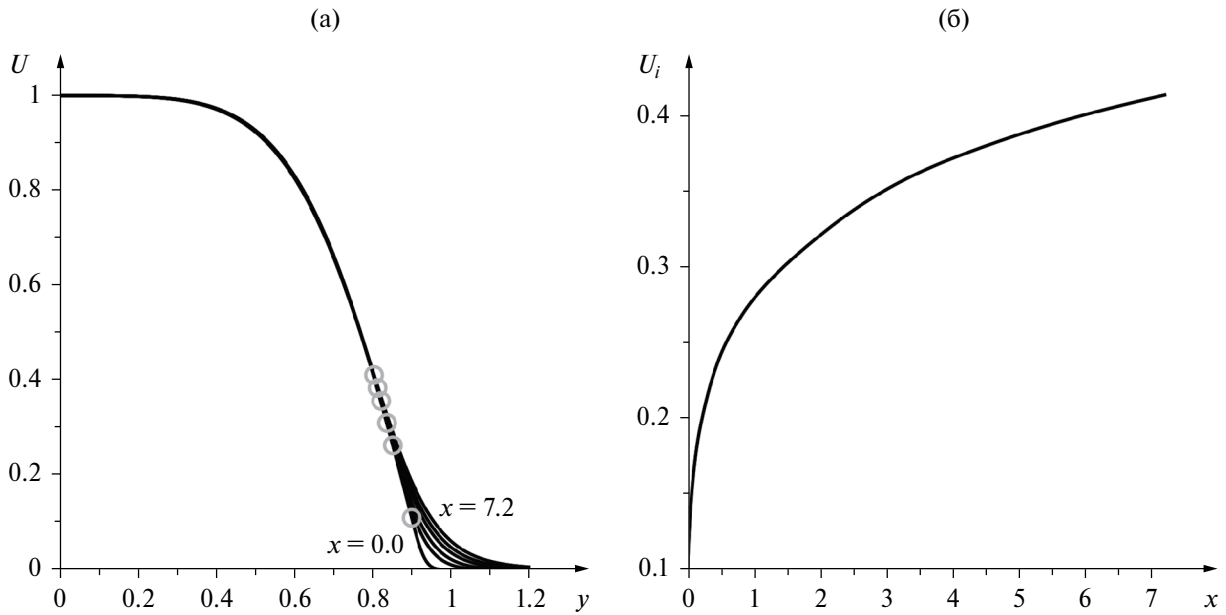


Рис. 6. Профили скорости при $x = 0.0, 0.8, 1.8, 3.4, 5.0, 7.2$ при начальном профиле, соответствующем $\xi = 0.1$, $\zeta = 1.6$, кружками показано положение точки перегиба (а). Значения скорости в точке перегиба профиля в зависимости от продольной координаты x (б).

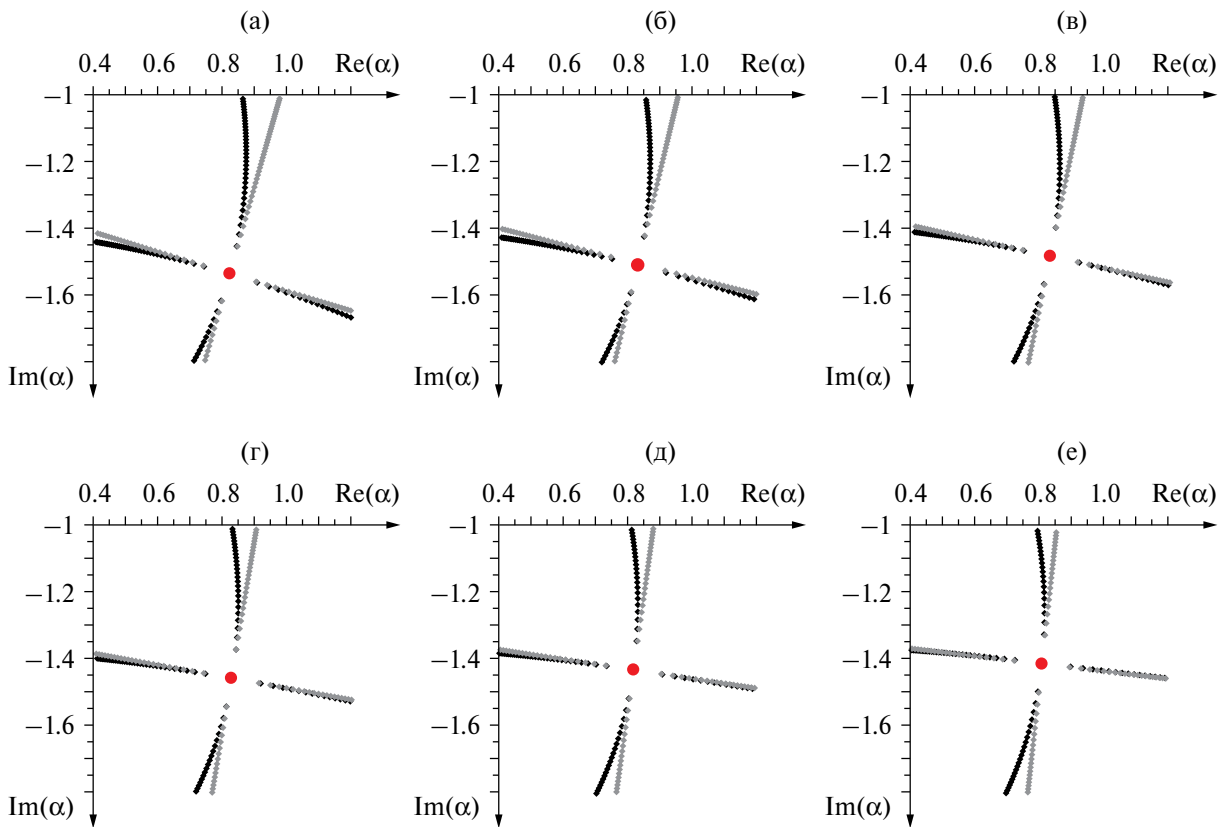


Рис. 7. Отображение линии $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega_s$ в плоскость α для профиля струи, соответствующего расстоянию $x = 0$ (а), 0.8 (б), 1.8 (в), 3.4 (г), 5.0 (д), 7.2 (е) от начального сечения. Чёрным цветом показан расчёт на основе уравнения Рэлея, серым – приближение с параметрами табл. 1, кружком показана седловая точка $\alpha = \alpha_s$.

Таблица 1. Параметры седловой точки при различных удалениях от входа

x	α_s	ω_s	λ
0.0	$0.820 - 1.535i$	$0.927 + 0.050i$	$2.993 - 1.932i$
0.8	$0.827 - 1.503i$	$0.911 + 0.041i$	$3.212 - 1.693i$
1.8	$0.827 - 1.479i$	$0.897 + 0.032i$	$3.343 - 1.488i$
3.4	$0.824 - 1.450i$	$0.879 + 0.021i$	$3.452 - 1.237i$
5.0	$0.819 - 1.428i$	$0.863 + 0.011i$	$3.510 - 1.038i$
7.2	$0.808 - 1.405i$	$0.845 + 0.000i$	$3.546 - 0.815i$

Таблица 2. Оценка параметров уравнения (4.6) при профилях на различных удалениях от входа

x	$\varkappa$	u_0
0.0	$-0.152 + 0.236i$	$-0.854 + 0.475i$
0.8	$-0.128 + 0.244i$	$-0.789 + 0.520i$
1.8	$-0.111 + 0.250i$	$-0.741 + 0.555i$
3.4	$-0.092 + 0.257i$	$-0.690 + 0.593i$
5.0	$-0.077 + 0.262i$	$-0.650 + 0.622i$
7.2	$-0.062 + 0.268i$	$-0.606 + 0.653i$

(2.8) благодаря связи $|\omega''(\alpha_s)| = 2/|\lambda|$ (4.2), меняется очень незначительно – в пределах 3%. Эти соображения позволяют принять коэффициенты близкими к постоянным. Найденные значения $\alpha_s(x)$, $\omega_s(x)$, $\lambda(x)$ приведены в табл. 1. Соответствующие им параметры $\varkappa$, u_0 представлены в табл. 2.

График изменения $\text{Im } \omega_s(x)$ показан на рис. 8, откуда очевидно близкое к линейному уменьшение инкремента роста абсолютной неустойчивости. Учитывая это, параметр μ_1 может быть оценен по табл. 1 как

$$\mu_1 = -\frac{d\text{Im}\omega}{dx} \approx 0.00700.$$

Принимая наименьший по модулю ноль функции Эйри $\zeta_1 \approx -2.338$ и рассматривая различные $\varkappa$ из табл. 2, получаем следующие оценки правой части (4.11): 0.042; 0.043; 0.044; 0.045; 0.045; 0.046 для $x = 0.0, 0.8, 1.8, 3.4, 5.0, 7.2$. Условие (4.8) выполнено во всех случаях. Поскольку $\text{Im } \omega_s(0) = 0.050$, условие глобальной неустойчивости (4.11) выполнено для всех пяти профилей. Учитывая приближённый характер оценки параметра $\varkappa$, можно ожидать наличия глобальной неустойчивости, то есть в данном случае локальная абсолютная неустойчивость на ограниченном пространственном интервале достаточно сильна для порождения глобальной неустойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм, определяющий длину участка локальной абсолютной неустойчивости затопленной струи с заданным входным профилем скорости. После параметризации входного профиля проводится расчёт его эволюции вниз по потоку, затем – анализ характера неустойчивости профилей скорости на различных расстояниях от начала полученной струи. Характер неустойчивости определяется поведением линий уровня $\text{Im } \omega = 0$ частоты ω на комплексной плоскости волнового числа α . В исследованном классе входных профилей скорости найдена область параметров, для которой реализуется наибольшая длина участка локальной абсолютной неустойчивости струи $L \approx 7.6$.

Наличие достаточно протяжённого участка локальной абсолютной неустойчивости течения приводит к его глобальной неустойчивости [12, 13]. На основе рассмотрения модельного уравнения получена связь между характеристиками локальной абсолютной неустойчивости, имеющей место на ограниченном пространственном интервале, и глобальными собственными частотами и модами. Продемонстрирован начальный профиль скорости струи из рассматриваемого класса профилей, для которого ожидается существование растущей глобальной собственной моды. Таким образом, показана возможность глобальной неустойчивости эволюционирующей в пространстве плоской затопленной струи.

Экспериментальная реализация глобально неустойчивой затопленной струи может быть проведена с помощью технологии, описанной в [25]. Данная задача представляет как фундаментальный интерес, так и прикладной: такое течение может быть использовано для ускорения перехода к турбулентности

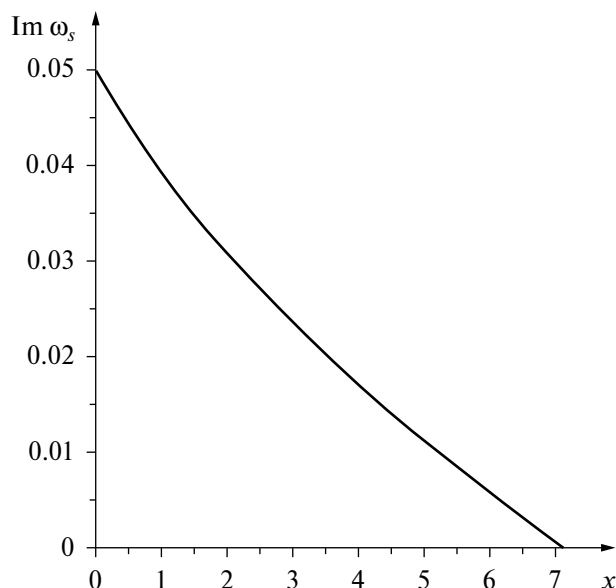


Рис. 8. Зависимость инкремента локальной абсолютной неустойчивости $\text{Im } \omega_s$ от продольной координаты x .

струй в различных технических устройствах и интенсификации перемешивания, например, в форсунках камер сгорания и в химических реакторах.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 20-19-00404-П.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайко Ю.С., Решмин А.И., Тепловодский С.Х., Чичерина А.Д. Исследование затопленных струй с увеличенной длиной начального ламинарного участка // Изв. РАН. МЖГ. 2018. Т. 1. С. 97–106.
2. Zayko J., Teplovodskii S., Chicherina A., Vedeneev V., Reshmin A. Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2018. V. 30. 043603.
3. Зайко Ю.С., Гареев Л.Р., Чичерина А.Д., Трифонов В.В., Веденеев В.В., Решмин А.И. Экспериментальное обоснование применимости линейной теории устойчивости к затопленной струе // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 497. С. 44–48.
4. Gareev L.R., Zayko J.S., Chicherina A.D., Trifonov V.V., Reshmin A.I., Vedeneev V.V. Experimental validation of inviscid linear stability theory applied to an axisymmetric jet // J. Fluid Mech. 2022. V. 934. A3.
5. Schlichting H. Boundary Layer Theory // McGraw-Hill. 1979.
6. Иорданский С.В., Куликовский А.Г. Об абсолютной устойчивости некоторых плоскопараллельных течений при больших числах Рейнольдса // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 4. С. 1326–1331.
7. Deissler R.L. The convective nature of instability in plane Poiseuille flow // Phys. Fluids. 1987. V. 30. No. 8. P. 2303–2305.
8. Brevdo L. Convectively unstable wave packets in Blasius boundary layer // ZAMM. 1995. V. 75. No. 6. P. 423–436.
9. Abid M., Brachet M., Huerre P. Linear hydrodynamic instability of circular jets with thin shear layers // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1993. V. 12(5). P. 683–693.
10. Vedeneev V.V., Zayko J.S. On absolute stability of free jets // J. Phys: Conf. Series. 2018. V. 1129. 012037.
11. Vedeneev V., Nikitin N. Absolute instability of plane incompressible jets // J. Fluid Mech. 2023. V. 962. A4.
12. Chomaz J.-M., Huerre P., Redekopp L.G. A frequency selection criterion in spatially developing flows // Stud. Appl. Math. 1991. V. 84. № 2. P. 119–144.
13. Le Dizès S., Huerre P., Chomaz J.M., Monkewitz P.A. Linear global modes in spatially developing media // Philos. Trans. R. Soc. London A. 1996. V. 354. № 1705. P. 169–212.
14. Monkewitz P.A. The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers // Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 5. P. 999–1006.

15. *Pier B.* On the frequency selection of finite-amplitude vortex shedding in the cylinder wake // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 458. P. 407–417.
16. *Coenen W., Lesshaft L., Garnaud X., Sevilla A.* Global instability of low-density jets // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 820. P. 187–207.
17. *Woodley B.M., Peake N.* Global linear stability analysis of thin aerofoil wakes // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 339. P. 239–260.
18. *Le Dizés S.* Global modes in falling capillary jets // *Eur. J. Mech., B/Fluids.* 1997. V. 16. № 6. P. 761–778.
19. *Yakubenko P.A.* Global capillary instability of an inclined jet // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 346. P. 181–200.
20. *Веденеев В.В., Порошина А.Б.* Устойчивость упругой трубки, содержащей текущую неньютоновскую жидкость и имеющей локально ослабленный участок // *Труды МИАН.* 2018. Т. 300. С. 42–64.
21. *Bondarev V., Vedeneev V.* Short-wave instability of an elastic plate in supersonic flow in the presence of the boundary layer // *Journal of fluid mechanics.* 2016. V. 802. P. 528–552.
22. *Веденеев В.В.* Математическая теория устойчивости плоскопараллельных течений и развитие турбулентности // *Долгопрудный: Издательский Дом “Интеллект”*, 2016. 152 с.
23. *Couairon A., Chomaz J.-M.* Fully nonlinear global modes in slowly varying flows // *Phys. Fluids.* 1999. V. 11. № 12. P. 3688–3703.
24. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965
25. *Спасова А.А., Зайко Ю.С.* Разработка алгоритма формирования затопленной струи с заданными характеристиками профиля скорости // *ПМТФ.* 2023. Т. 64. № 4. С. 67–75.

Absolute and Global Instability of Plane Submerged Jets

V. V. Vedeneev*, L. R. Gareev, Ju. S. Zayko***, and N. M. Exter******

Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia

*e-mail: vasily@vedeneev.ru

**e-mail: gareev@imec.msu.ru

***e-mail: zayko@imec.msu.ru

****e-mail: exter@imec.msu.ru

The family of velocity profiles of a submerged jet, which are absolutely unstable in the plane-parallel approximation, is considered. The profiles are specified by two parameters, the first of them is responsible for the location of the only inflection point in the velocity profile, and the second is responsible for the shear layer thickness. An algorithm for determining the length of the section of local absolute instability of the jet with a given input velocity profile, that is, the distance at which absolute instability gives way to convective instability, has been implemented. The dependence of this length on the parameters defining the input profile is obtained. A connection between the characteristics of local absolute instability calculated in the plane-parallel approximation and global instability of the jet evolving in space is analytically obtained. The input velocity profile that corresponds to sufficiently large length of the zone of local absolute instability, at which global instability of spatially developing jet occurs is demonstrated. Thus, the possibility of existence of global instability of plane submerged jets with special velocity distributions is demonstrated.

Keywords: jet flow, linear stability theory, absolute instability, global instability.