

В настоящем курсе рассматривается теория устойчивости плоских течений вязкой несжимаемой жидкости. Рассматриваются только установившиеся слоистые течения — плоскопараллельные или близкие к ним; массовыми силами пренебрегается. Изучим сначала возможные виды таких течений.

1 Точные решения уравнений Навье-Стокса

Уравнения Навье-Стокса для установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Рассмотрим решения, имеющие только одну компоненту скорости $u(x, y)$, а $v(x, y) \equiv 0$. Первое уравнение (1) немедленно даёт $u = u(y)$, а третье — $p = p(x)$. Тогда второе уравнение (1) сводится к

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Поскольку левая часть в этом равенстве зависит только от x , а правая — только от y , то единственная возможность удовлетворить ему — положить обе части константами:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -i \equiv \text{const}.$$

Величина i представляет собой градиент давления, под действием которого происходит движение жидкости. Если движение происходит слева направо, давление в течении падает, и $i > 0$. Распределение скорости всегда параболическое:

$$u = -\frac{i}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2.$$

Постоянные c_1, c_2 определяются из граничных условий.

1.1 Плоское течение Пуазейля

Течением Пуазейля называется течение между двумя параллельными неподвижными стенками, расстояние между которыми $2h$. Граничное условие прилипания на стенках даёт: $u(h) = u(-h) = 0$, откуда $c_1 = 0$, $c_2 = ih^2/(2\mu)$, и

$$u = \frac{i}{2\mu} (h^2 - y^2)$$

Профиль скорости — параболический и показан на рис. 1, а. Максимальное значение скорости достигается в центре канала и равно $u_{\max} = ih^2/(2\mu)$.

1.2 Плоское течение Куэтта

Течением Куэтта называется течение между двумя параллельными стенками, одна из которых (для определённости — нижняя) неподвижна, другая движется с постоянной скоростью U . Расстояние между стенками $2h$. Граничное условие прилипания на стенках даёт: $u(h) = U$, $u(-h) = 0$, откуда $c_1 = U/(2h)$, $c_2 = ih^2/(2\mu) + U/2$. Окончательно получаем:

$$u = \frac{i}{2\mu}(h^2 - y^2) + \frac{U}{2} \left(1 + \frac{y}{h}\right).$$

При $i = 0$ имеем линейный профиль скорости, при $i \neq 0$ — параболический (рис. 1, б, в). Максимум скорости достигается во внутренней точке канала, или на стенке, в зависимости от соотношения между скоростью движения стенки U и градиентом давления i .

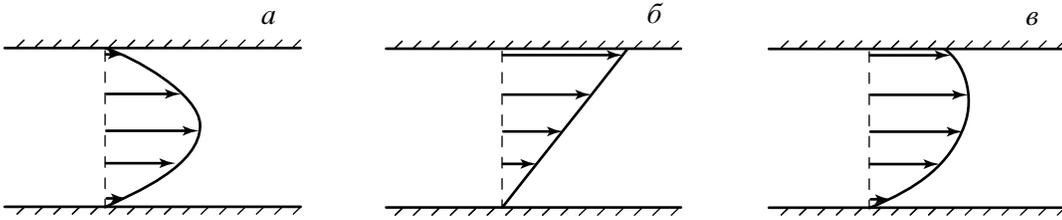


Рис. 1: Течение Пуазейля (а), течение Куэтта без градиента давления (б), течение Куэтта с градиентом давления (в).

2 Приближённые решения уравнений Навье-Стокса

Как показано выше, класс точных решений несжимаемой вязкой жидкости в виде плоскопараллельных установившихся течений очень узок, и ограничен линейными или параболическими профилями скорости. Однако, при больших числах Рейнольдса существует множество решений в виде «почти» плоскопараллельных течений: хотя вертикальная компонента скорости не равна в точности нулю, она является малой по сравнению с горизонтальной компонентой. Локально такие течения можно рассматривать как параллельные. На практике они встречаются в самых разных задачах, и исследование их устойчивости имеет важное практическое значение. Здесь мы рассмотрим уравнения, которыми описываются такие течения, и три конкретных решения: пограничный слой, затопленная струя, и дальний аэродинамический след за телом.

2.1 Вывод уравнений Прандтля

Будем рассматривать течения, в которых, во-первых, неоднородность течения сосредоточена в узком горизонтальном слое, и, во-вторых, вертикальная компонента ско-

рости много меньше горизонтальной. Для выяснения, какие члены уравнений Навье-Стокса являются определяющими в таких течениях, отмасштабируем все величины, введя разные масштабы горизонтальной и вертикальной координат и компонент скорости:

$$x = Xx', \quad y = Yy', \quad u = Uu', \quad v = Vv', \quad p = Pp'$$

Большими буквами обозначены характерные масштабы, которые пока произвольны. Подставив эти выражения в (1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V X}{U Y} \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0 \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{V X}{U Y} v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{P}{\rho U^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\mu}{\rho U X} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{X^2}{Y^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{V Y}{U X} u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{V^2}{U^2} v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{P}{\rho U^2} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\mu}{\rho U X} \left(\frac{V Y}{U X} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{V X}{U Y} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \end{aligned}$$

Введём число Рейнольдса $R = \rho U X / \mu$, и будем считать, что $R \gg 1$. Определим теперь масштабы так, чтобы часть членов отбросить:

$$\frac{V}{U} = \frac{Y}{X} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad P = \rho U^2. \quad (2)$$

Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0 \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + R \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{1}{R} u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{1}{R} v' \frac{\partial v'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \end{aligned}$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ часть членов исчезают, и система сводится к

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0 \\ u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} &= -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p'}{\partial y'} \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует, что $p' = p'(x)$. Это важнейшее свойство течений, близких к параллельным, можно переформулировать так: давление в каждом вертикальном сечении постоянно. В частности, в случае пограничного слоя на твёрдом теле давление внутри слоя совпадает с давлением во внешнем потоке.

Далее будут рассматриваться течения, в которых при $y' \rightarrow \pm\infty$ имеется однородное течение, не зависящее от x . Таким образом, $\partial p'/\partial x' = 0$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость. Эта упрощённая система уравнений описывает «почти» параллельные течения и носит название уравнений Прандтля.

2.2 Аэродинамический след за телом

Наиболее простое приближённое решение системы (3) описывает течение вдали за телом. Пусть твёрдое тело, расположенное в окрестности точки 0, обтекается потоком, имеющем на бесконечности скорость $u = U_\infty$, $v = 0$. Будем искать решение системы (3) при $x \gg 1$. Предположим, что скорость не слишком отличается от скорости на бесконечности, то есть $u = U_\infty - \hat{u}$, $|\hat{u}| \ll U_\infty$, $|v| \ll U_\infty$. Подставим эти выражения во второе уравнение (3) и линеаризуем его:

$$U_\infty \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}$$

Это — уравнение теплопроводности. Поскольку рассматривается область течения далеко за телом, где влияние его формы и размера на течение теряется, то в постановке отсутствует характерный линейный размер, и задача автомодельная. Известное автомодельное решение уравнения теплопроводности (функция Грина) имеет вид

$$\hat{u} = \frac{C}{\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{U_\infty y^2}{4\nu x}\right) \quad (4)$$

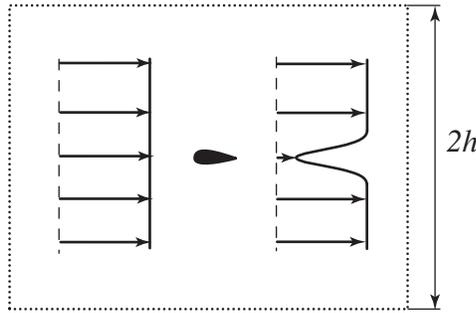


Рис. 2: Контур интегрирования высоты $2h$, охватывающий тело.

Для выяснения физического смысла константы C запишем интегральные законы сохранения массы и импульса для прямоугольной области, окружающей тело (рис. 2):

$$\rho U_\infty \cdot 2h - \int_{-h}^h \rho u dy = 0$$

$$\rho U_\infty^2 \cdot 2h - \int_{-h}^h \rho u^2 dy = W,$$

где W — сила сопротивления тела. Домножая первое уравнение на U_∞ , вычитая его из второго и устремляя $h \rightarrow \infty$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho u (U_\infty - u) dy = W.$$

Подставляя $u = U_\infty - \hat{u}$ и линеаризуя, имеем:

$$\rho U_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u} dy = W.$$

Подставляя сюда (4) и пользуясь тем, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, получаем:

$$C = \frac{W}{2\rho\sqrt{\pi\nu U_\infty}}.$$

Таким образом, окончательно

$$\hat{u} = \frac{W}{2\rho\sqrt{\pi\nu U_\infty x}} \exp\left(-\frac{U_\infty y^2}{4\nu x}\right). \quad (5)$$

Поле скоростей дальнего следа за телом (5) показано на рис. 3.

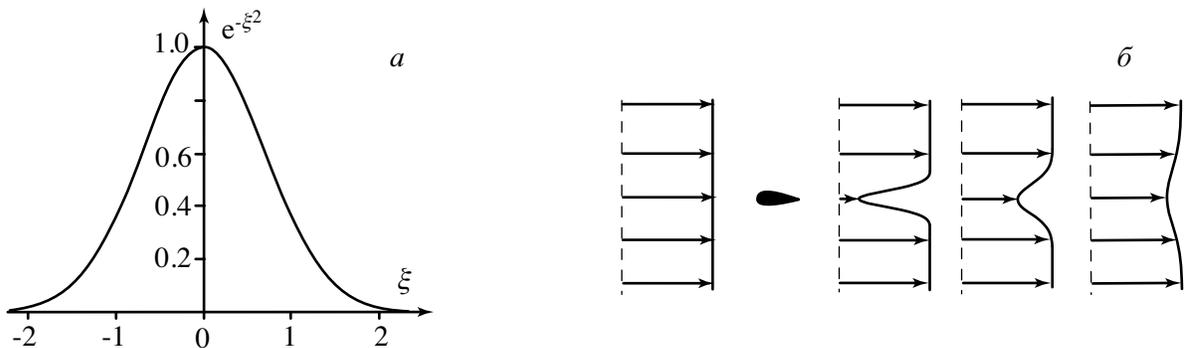


Рис. 3: Функция $e^{-\xi^2}$ (а), течение в дальнем следе за телом (б).

2.3 Пограничный слой Блазиуса

Второй пример почти плоскопараллельного течения — пограничный слой на полубесконечной пластине. Это течение имеет чрезвычайно важные практические приложения, поскольку пограничные слои образуются при обтекании всех твёрдых тел при больших R , и устойчивость или неустойчивость этих слоёв определяет область перехода к турбулентности и, как следствие, гидродинамическое сопротивление тела. Преобразуем уравнения (3), введя функцию тока ψ по формуле

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -v dx + u dy,$$

интеграл берётся по произвольной кривой, связывающей точки (x_0, y_0) и (x, y) . Пользуясь формулой Стокса и первым уравнением (3), легко показать, что интеграл не зависит от выбранной кривой, и ψ является функцией только координат. Таким образом, в несжимаемой вязкой жидкости всего можно ввести функцию тока, причём, как следует из её определения,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение (3), получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (7)$$

Граничные условия — условие прилипания $\psi = \partial \psi / \partial y = 0$ на поверхности пластины $y = 0$ и однородное течение $\partial \psi / \partial y \rightarrow U_\infty$ при $y \rightarrow \infty$. Для получения автомодельного решения задачи рассмотрим случай, когда пластина полубесконечная: $x \geq 0, y = 0$. Тогда в задаче отсутствует характерный линейный размер.

Для поиска автомодельного решения воспользуемся теорией размерности. Введём масштаб L вдоль оси x и масштаб U_∞ скорости u . Тогда из (2) масштаб вдоль оси y — $L/\sqrt{R} = \sqrt{L\nu/U_\infty}$. Из первого равенства (6) следует, что масштаб функции тока ψ — $\sqrt{L\nu U_\infty}$. Тогда согласно π -теореме имеем:

$$\psi = \sqrt{L\nu U_\infty} \Psi \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{\sqrt{L\nu/U_\infty}} \right)$$

Поскольку масштаб L может быть выбран произвольно, то ψ от него не зависит, следовательно, ψ должна иметь вид

$$\psi = \sqrt{L\nu U_\infty} \sqrt{\frac{x}{L}} \cdot f \left(\frac{y}{\sqrt{L\nu/U_\infty}} / \sqrt{\frac{x}{L}} \right) = \sqrt{\nu U_\infty x} \cdot f \left(y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \right)$$

Подставив это выражение в (7), и учитывая граничные условия, получаем уравнение на f :

$$2f''' + ff'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1.$$

Это уравнение не имеет аналитических решений, но легко решается численно. Решение с указанными граничными условиями хорошо известно и описывает течение в пограничном слое на плоской пластине. На рис. 4 показана функция $u = \partial\psi/\partial y = U_\infty f'(y\sqrt{U_\infty/\nu x})$.

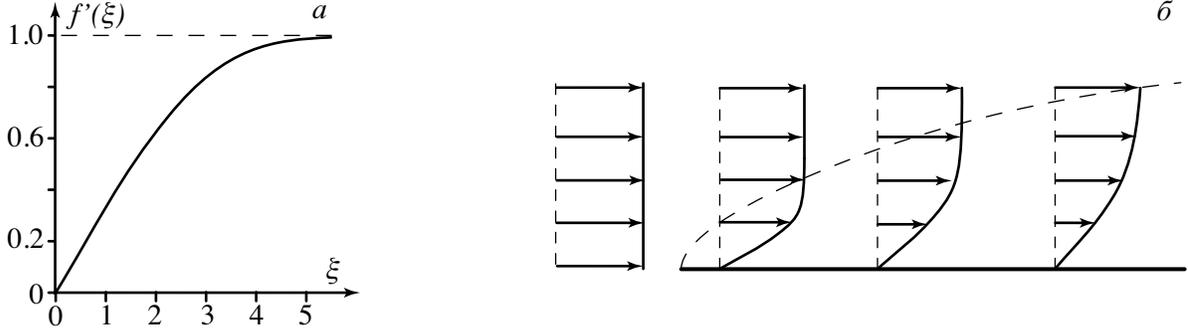


Рис. 4: Решение $f'(\xi)$ (а), течение в пограничном слое Блазиуса (б).

2.4 Затопленная струя

Другое автомодельное решение уравнения (7) описывает течение жидкости в виде струи, вытекающей из бесконечно тонкой щели в полупространство, заполненное покоящейся жидкостью. Граничные условия — условие симметрии $\psi = \partial^2\psi/\partial y^2 = 0$ на оси струи $y = 0$ и покой $\partial\psi/\partial y \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. В такой постановке отсутствуют характерные масштабы как длины, так и скорости. Однако, имеется характерное значение импульса, протекающего через вертикальное сечение струи:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy = J_0, \quad (8)$$

не зависящее от выбранного сечения в силу интегрального закона изменения импульса. Это соотношение даёт связь характерных длин и скоростей. Обозначим: L — масштаб вдоль оси x , U — масштаб скорости u , из (2) получаем, что $L/\sqrt{R} = \sqrt{\nu L/U}$ — масштаб вдоль оси y . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = \sqrt{\nu LU^3} \int_{-\infty}^{\infty} u'^2 dy' = \frac{J_0}{\rho},$$

штрихами обозначены безразмерные переменные. Положим $\int_{-\infty}^{\infty} u'^2 dy' = 1$ (этого можно добиться соответствующим выбором L или U), тогда

$$U = \left(\left(\frac{J_0}{\rho} \right)^2 \frac{1}{\nu L} \right)^{1/3}.$$

Масштаб функции тока, согласно первому равенству (6), имеет вид

$$UY = \sqrt{UL\nu} = \left(\frac{J_0\nu L}{\rho} \right)^{1/3}.$$

Применяя π -теорему, приходим к соотношению

$$\psi(x, y) = \left(\frac{J_0\nu L}{\rho} \right)^{1/3} \cdot \Phi \left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{U}{\nu L}} \right) = \left(\frac{J_0\nu L}{\rho} \right)^{1/3} \cdot \Phi \left(\frac{x}{L}, y \left(\frac{J_0}{\rho} \right)^{1/3} \frac{1}{(\nu L)^{2/3}} \right).$$

Поскольку масштаб L был выбран произвольно, ψ от него не зависит и имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \left(\frac{J_0\nu L}{\rho} \right)^{1/3} \left(\frac{x}{L} \right)^{1/3} \cdot g \left(y \left(\frac{J_0}{\rho} \right)^{1/3} \frac{1}{(\nu L)^{2/3}} / \left(\frac{x}{L} \right)^{2/3} \right) = \\ &= \left(\frac{J_0\nu x}{\rho} \right)^{1/3} \cdot g \left(\frac{y}{x^{2/3}} \left(\frac{J_0}{\rho\nu^2} \right)^{1/3} \right) \end{aligned}$$

Подстановка в (7) даёт уравнение

$$3g''' + g'^2 + gg'' = 0, \quad g(0) = g''(0) = g'(\infty) = 0, \quad (9)$$

а условие (8) даёт условие нормировки решения

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'^2(\xi) d\xi = 1, \quad (10)$$

где ξ — автомодельная переменная. Уравнение (9) интегрируется в квадратурах; решение, удовлетворяющее (10), даётся функцией

$$g(\xi) = \frac{6^{2/3}}{2} \operatorname{th} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{6}} \xi \right),$$

где $\operatorname{th}(\xi) = (e^\xi - e^{-\xi}) / (e^\xi + e^{-\xi})$ — гиперболический тангенс.

Таким образом, решение уравнений Прандтля, соответствующее истечению струи жидкости в покоящуюся жидкость (затопленная струя), имеет вид

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left(\frac{J_0^2}{\rho^2 \nu} \right)^{1/3} \frac{1}{x^{1/3}} g' \left(\frac{y}{x^{2/3}} \left(\frac{J_0}{\rho \nu^2} \right)^{1/3} \right).$$

Соответствующие профили скорости показаны на рис. 5.

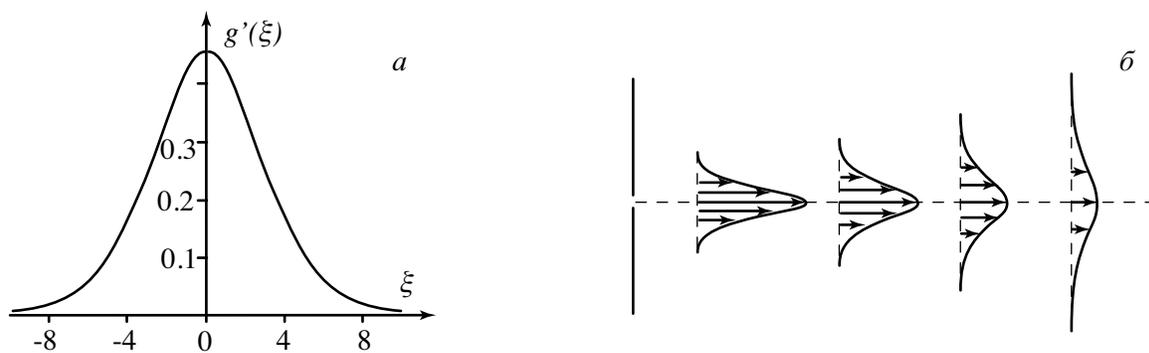


Рис. 5: Решение $g'(\xi)$ (а), автомодельное течение в струе (б).