1 Вывод уравнений для возмущений течения жидкости

1.1 Возмущения в виде бегущих волн

Запишем полную систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, состоящую из уравнения неразрывности и трёх уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ &\rho\frac{dv_i}{dt} = -\nabla_i p + \mu\triangle v_i, \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{1}$$

Неизвестыми являются три компоненты вектора скорости $\vec{v} = \{u; v; w\}$ и давление p. Обезразмерим уравнения, выбрав в качестве размерно-независимых параметров характерную длину, скорость и плотность жидкости L, U и ρ. Тогда в системе останется единственный безразмерный параметр — число Рейнольдса $R = LU\rho/\mu$. Раскрывая производные, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ &\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Будем рассматривать малые возмущения некоторого заданного установившегося плоскопараллельного течения

$$u = u_0(z), \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = p_0,$$

вектор скорости которого параллелен оси x и зависит только от координаты z, а давление постоянно. Возмущённое движение имеет вид:

$$u = u_0(z) + u'(x,y,z), \quad v = v'(x,y,z), \quad w = w'(x,y,z), \quad p = p_0 + p'(x,y,z),$$

здесь штрихом обозначены возмущённые величины, причём $|u'|, |v'|, |w'| \ll \max|u_0|$, $|p'| \ll p_0$. Устойчивость будем изучать в линейном приближении. Для этого подставим эти выражения в (2), линеаризуем и вычтем те же уравнения для невозмущённого течения. В результате получим следующую систему линейных уравнений относительно возмущённых величин:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial u'}{\partial t}+u_0\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\partial u_0}{\partial z}=-\frac{\partial p'}{\partial x}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial v'}{\partial t}+u_0\frac{\partial v'}{\partial x}=-\frac{\partial p'}{\partial y}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial w'}{\partial t}+u_0\frac{\partial w'}{\partial x}=-\frac{\partial p'}{\partial z}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Эта система, дополненная граничными и начальными условиями, определяет поведение малых возмущений течения.

Заметим, во-первых, что хотя физическая постановка задачи предполагает, что возмущения действительны, в силу линейности уравнений можно рассматривать и комплексные решения. Такие решения предполагают, что физический смысл имеет их действительная и мнимая части, а комплексная форма используется исключительно из-за математического удобства.

Во-вторых, полученная линейная система имеет коэффициенты, зависящие только от z и, следовательно, имеет решения, экспоненциальные по x, y и t. Это свойство используется в основном методе исследования устойчивости — методе нормальных (или собственных) мод, который заключается в следующем. Рассматриваются не произвольные возмущения с начальными условиями, а возмущения специального вида

$$
\begin{pmatrix} u'(x,y,z)\\ v'(x,y,z)\\ w'(x,y,z)\\ p'(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat u(z)\\ \hat v(z)\\ \hat w(z)\\ \hat p(z)\end{pmatrix} e^{i(\alpha x+\beta y-\omega t)}. \tag{4}
$$

Здесь α и β — заданные вещественные числа. Такие решения, называемые модами, являются бегущими волнами: их вещественные (и мнимые) части имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} f'(x,y,z)&=\operatorname{Re}(\hat f(z)e^{i(\alpha x+\beta y-\omega t)})=\\
&=(\operatorname{Re}\hat f(z)\cos(\alpha x+\beta y-\operatorname{Re}\omega t)-\operatorname{Im}\hat f(z)\cos(\alpha x+\beta y-\operatorname{Re}\omega t))e^{\operatorname{Im}\omega t}=\\
&=|\hat f(z)|\cos(\alpha x+\beta y+\varphi(z)-\operatorname{Re}\omega t)e^{\operatorname{Im}\omega t}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

В каждом слое $z=\mathrm{const}$ движение имеет вид волны, перемещающейся без деформации в направлении, заданном α и β. Одновременно происходит усиление или затухание волны, зависящее от знака $\operatorname{Im}\omega$. Величины α и β называются волновыми числами; вектор $\{\alpha;\beta\}$ в плоскости xy называется волновым вектором. Направление волнового вектора задаёт направление движения волны, а его длина определяет длину волны λ:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\pi/\lambda.$$

Величина ω называется частотой волны. Она должна находится из решения системы (3) после подстановки туда (4), как будет показано ниже. Таким образом, $\omega = \omega(\alpha, \beta)$. Если $\operatorname{Im}\omega(\alpha, \beta) > 0$ для каких-нибудь α и β, то течение неустойчиво. Если же $\operatorname{Im}\omega(\alpha, \beta) \leqslant 0$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то можно говорить лишь об устойчивости возмущения вида (4). Однако, часто из этого следует и устойчивость возмущений произвольного вида.

Итак, поведение возмущений в виде бегущей волны (4) часто определяют устойчивость течения по отношению к произвольным возмущениям, поэтому сначала остановимся на исследовании таких возмущений; возмущения произвольного вида будут рассмотрены позднее. Подставим (4) в (3), введя для удобства вместо ω величину $c = \omega/\alpha$, называемую фазовой скоростью:

$$
\begin{aligned}
& i\alpha\hat{u} + i\beta\hat{v} + \frac{\partial\hat{w}}{\partial z} = 0 \\
& i\alpha(u_0 - c)\hat{u} + \hat{w}\frac{\partial u_0}{\partial z} = -i\alpha\hat{p} + \frac{1}{R}\left(-\alpha^2\hat{u} - \beta^2\hat{u} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\right) \\
& i\alpha(u_0 - c)\hat{v} = -i\beta\hat{p} + \frac{1}{R}\left(-\alpha^2\hat{v} - \beta^2\hat{v} + \frac{\partial^2\hat{v}}{\partial z^2}\right) \\
& i\alpha(u_0 - c)\hat{w} = -\frac{\partial\hat{p}}{\partial z} + \frac{1}{R}\left(-\alpha^2\hat{w} - \beta^2\hat{w} + \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Граничные условия для этой системы зависят от рассматриваемого основного течения. Если, например, это течение между двумя твёрдыми стенками $z = z_1$, z_2, это — условия прилипания

$$\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0, \quad z = z_1, z_2.$$

Тривиальное решение (6) с однородными граничными условиями — нулевое. Очевидно, нас интересуют решения, отличные от нуля; они существуют лишь при некоторых определённых значениях c. Таким образом, получаем задачу на собственные значения c, которые могут быть выражены в виде

$$F(\alpha, \beta, c, R) = 0. \tag{7}$$

1.2 Теорема Сквайера

Целью исследования уравнения (7) является определение такого числа Рейнольдса R_{cr}, что течение устойчиво при $R \leqslant R_{cr}$ и неустойчиво при $R > R_{cr}$. Такое исследование упрощается благодаря теореме Сквайера, который показал, что достаточно исследовать только плоские возмущения (т.е. возмущения с $\beta = 0$), поскольку они являются наиболее неустойчивыми.

Теорема Сквайера. Для вычисления критического числа Рейнольдса R_{cr} течения вязкой жидкости достаточно рассматривать только плоские возмущения.

Для доказательства сложим второе уравнение (6) с третьим, умноженным на β/α:

$$i(u_0-c)(\alpha\hat{u}+\beta\hat{v})+\hat{w}\frac{\partial u_0}{\partial z}=-i\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}\hat{p}+\frac{1}{R\alpha}\left(-(\alpha^2+\beta^2)(\alpha\hat{u}+\beta\hat{v})+\frac{\partial^2(\alpha\hat{u}+\beta\hat{v})}{\partial z^2}\right)$$

Обозначим: $\tilde{\alpha}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\alpha\hat{u}+\beta\hat{v}=\tilde{\alpha}\tilde{u}$, $\tilde{p}=\tilde{\alpha}\hat{p}/\alpha$, $\tilde{R}=\alpha R/\tilde{\alpha}$, $\tilde{w}=\hat{w}$. Тогда полученное уравнение можно переписать так:

$$i\tilde{\alpha}(u_0-c)\tilde{u}+\tilde{w}\frac{\partial u_0}{\partial z}=-i\tilde{p}+\frac{1}{\tilde{R}}\left(-\tilde{\alpha}^2\tilde{u}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2}\right) \tag{8}$$

Первое уравнение (6) и третье уравнение, умноженное на $\tilde{\alpha}/\alpha$, приобретают вид

$$\begin{aligned} &i\tilde{\alpha}\tilde{u}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}=0\\ &i\tilde{\alpha}(u_0-c)\tilde{w}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}+\frac{1}{\tilde{R}}\left(-\tilde{\alpha}^2\tilde{w}+\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial z^2}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Легко видеть, что (8), (9) задают эквивалентную двумерную задачу с $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}=0$, $\tilde{R}$ относительно $\tilde{u}$, $\tilde{v}=0$, $\tilde{w}$ и тем же собственным значением c. Поскольку $\tilde{R}<R$, получаем, что каждому трёхмерному растущему возмущению соответствует растущее двумерное возмущение с меньшим числом Рейнольдса. Теорема доказана.

Заметим, что поскольку $\operatorname{Im}\tilde{\omega}=c\tilde{\alpha}>c\alpha=\operatorname{Im}\omega$, то скорость роста двумерного возмущения больше трёхмерного. Получаем формулировку теоремы Сквайера для случая невязкой жидкости ($R=\infty$): в случае неустойчивости плоские возмущения являются наиболее быстро растущими.

1.3 Уравнения Орра-Зоммерфельда и Рэлея

Таким образом, дальше будем рассматривать плоские возмущения. Система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &i\alpha\hat{u}+\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}=0\\ &i\alpha(u_0-c)\hat{u}+\hat{w}\frac{\partial u_0}{\partial z}=-i\alpha\hat{p}+\frac{1}{R}\left(-\alpha^2\hat{u}+\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\right)\\ &i\alpha(u_0-c)\hat{w}=-\frac{\partial\hat{p}}{\partial z}+\frac{1}{R}\left(-\alpha^2\hat{w}+\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Преобразуем её к одному уравнению относительно $\hat{w}$. Выразим $\hat{u}$ из первого уравнения

$$\hat{u}=\frac{i}{\alpha}\frac{\partial\hat{w}}{\partial z} \tag{11}$$

и подставим во второе:

$$\hat{p}=-\frac{i}{\alpha}(u_0-c)\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}+\frac{i}{\alpha}\hat{w}\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{1}{R}\left(-\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}+\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^3\hat{w}}{\partial z^3}\right).$$

Подставляя $\hat{p}$ в третье уравнение, получаем

$$\frac{1}{iR\alpha}\left(\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial z^4}-2\alpha^2\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2}+\alpha^4\hat{w}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left((u_0-c)\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}-\hat{w}\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)-\alpha^2(u_0-c)\hat{w}. \tag{12}$$

Это уравнение называется уравнением Орра-Зоммерфельда. Часто его записывают в операторной форме

$$\frac{1}{iR\alpha}(D^2-\alpha^2)^2\hat{w}=(u_0-c)(D^2-\alpha^2)\hat{w}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\hat{w}, \tag{13}$$

где $D=\partial/\partial z$.

Граничное условие прилипания на твёрдых стенках в силу (11) формулируется так:

$$\hat{w}=\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}=0,\quad z=z_1,z_2.$$

С этими граничными условиями уравнение Орра-Зоммерфельда определяет задачу на собственные значения c.

В случае невязкой жидкости $R\to\infty$, и уравнение Орра-Зоммерфельда вырождается в уравнение, называемое уравнением Рэлея

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((u_0-c)\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}-\hat{w}\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)-\alpha^2(u_0-c)\hat{w}=0, \tag{14}$$

или

$$(u_0-c)(D^2-\alpha^2)\hat{w}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}\hat{w}=0. \tag{15}$$

Поскольку оно имеет не 4-й, а 2-й порядок, то ставится лишь по одному граничному условию на жёстких стенках — условию непротекания

$$\hat{w}=0,\quad z=z_1,z_2.$$

Итак, мы получили два уравнения, описывающие поведение возмущений: в вязкой жидкости это уравнение Орра-Зоммерфельда, в невязкой — уравнение Рэлея. Каждое из них вместе с граничными условиями определяет задачу на собственные значения c. Если существует $\alpha\in\mathbb{R}$, такое что $\operatorname{Im}c(\alpha)>0$, то течение неустойчиво. В противном случае течение устойчиво, при этом различают два типа устойчивости: если $\operatorname{Im}c(\alpha)<0$, то устойчивость *асимптотическая* (возмущение экспоненциально затухает), если же $\operatorname{Im}c(\alpha)=0$, то такая устойчивость называется *нейтральной* — амплитуда возмущения не растёт и не затухает.