1 Невязкая теория устойчивости

Сначала будем изучать устойчивость течения в невязком приближении, т.е. при $R = \infty$. Возмущения в виде бегущих волн описываются уравнением Рэлея (крышечки над w далее не пишем, подразумевая под w возмущение вертикальной компоненты скорости)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((u_0 - c)\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial u_0}{\partial z}\right) - \alpha^2(u_0 - c)w = 0, \tag{1}$$

или

$$(u_0 - c)(D^2 - \alpha^2)w - \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}w = 0. \tag{2}$$

Будем без ограничения общности рассматривать течения, заключённые между двумя стенками $z = z_1, z_2$, на которых ставится по одному граничному условию непротекания

$$w = 0, \quad z = z_1, z_2. \tag{3}$$

Течения в неограниченных областях (пограничные слои, струи и т. д.) сводятся к этому случаю удалением одной или обеих стенок в бесконечность.

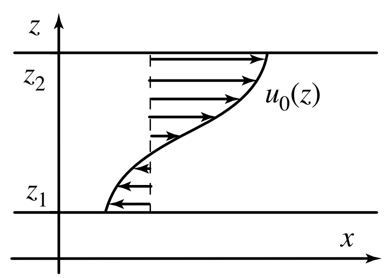

Рис. 1: Течение, заданное профилем скорости $u_0(z)$.

1.1 Теорема Рэлея о точке перегиба

Один из простых критериев, позволяющий судить о невязкой устойчивости течения — наличие в профиле скорости точки перегиба.

Теорема Рэлея о точке перегиба. Если течение неустойчиво в невязком приближении, то имеется точка $z = z_s$, такая что $u_0''(z_s) = 0$.

Для доказательства перепишем (2) в виде

$$w'' - \alpha^2 w - \frac{u_0''}{u_0 - c}w = 0. \tag{4}$$

Поскольку течение неустойчиво, то имеется $\alpha \in \mathbb{R}$, собственная функция w и собственное значение $c = c_R + ic_I$, $c_I > 0$, такие что (4) выполнено. Домножим (4) на

$w^*(z)$ и проинтегрируем от z_1 до z_2:

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(w''w^* - \alpha^2|w|^2 - \frac{u_0''}{u_0 - c}|w|^2 \right) dz = 0.$$

Интегрирование первого слагаемого по частям даёт

$$\int_{z_1}^{z_2} \left(-|w'|^2 - \alpha^2|w|^2 - \frac{u_0''}{u_0 - c}|w|^2 \right) dz = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим мнимую часть этого равенства:

$$\mathrm{Im} \int_{z_1}^{z_2} \frac{u_0''}{u_0 - c_R - ic_I}|w|^2 dz = c_I \int_{z_1}^{z_2} \frac{u_0''}{|u_0 - c|^2}|w|^2 dz = 0. \tag{6}$$

Из последнего соотношения вытекает утверждение теоремы.

1.2 Теорема Фьёртофта

Теорема о точке перегиба позволяет сразу судить об устойчивости некоторых течений. Более сильное утверждение даётся следующей теоремой.

Теорема Фьёртофта. Если течение неустойчиво в невязком приближении (и, следовательно, имеет точку перегиба z_s), то найдётся точка z, в которой $u_0''(z)(u_0(z) - u_s) < 0$; здесь $u_s = u_0(z_s)$.

Перепишем вещественную часть (5) в форме

$$\mathrm{Re} \int_{z_1}^{z_2} \frac{u_0''}{u_0 - c}|w|^2 dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{(u_0 - c_R)u_0''}{|u_0 - c|^2}|w|^2 dz = -\int_{z_1}^{z_2} \left(|w'|^2 + \alpha^2|w|^2 \right) dz. \tag{7}$$

К левой части последнего равенства прибавим величину

$$(c_R - u_s) \int_{z_1}^{z_2} \frac{u_0''}{|u_0 - c|^2}|w|^2 dz,$$

равную нулю в силу (6). Получим:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{(u_0 - u_s)u_0''}{|u_0 - c|^2}|w|^2 dz = -\int_{z_1}^{z_2} \left(|w'|^2 + \alpha^2|w|^2 \right) dz < 0.$$

Из полученного неравенства следует утверждение теоремы.

Для некоторых частных случаев можно вывести и более сильное утверждение: так, для монотонного профиля скорости, имеющего единственную точку перегиба, из неустойчивости следует, что $u_0''(z)(u_0(z) - u_s) \leqslant 0$ при всех $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, причём при $z \neq z_s$ неравенство выполнено строго. То же можно сказать и для симметричного профиля скорости, монотонного и имеющего единственную точку перегиба в каждой области симметрии.

Ни наличие точки перегиба, ни условие Фьёртофта не являются достаточными условиями для неустойчивости. Но они, тем не менее, позволяют просто судить об устойчивости некоторых профилей. Примеры течений показаны на рис. 2.

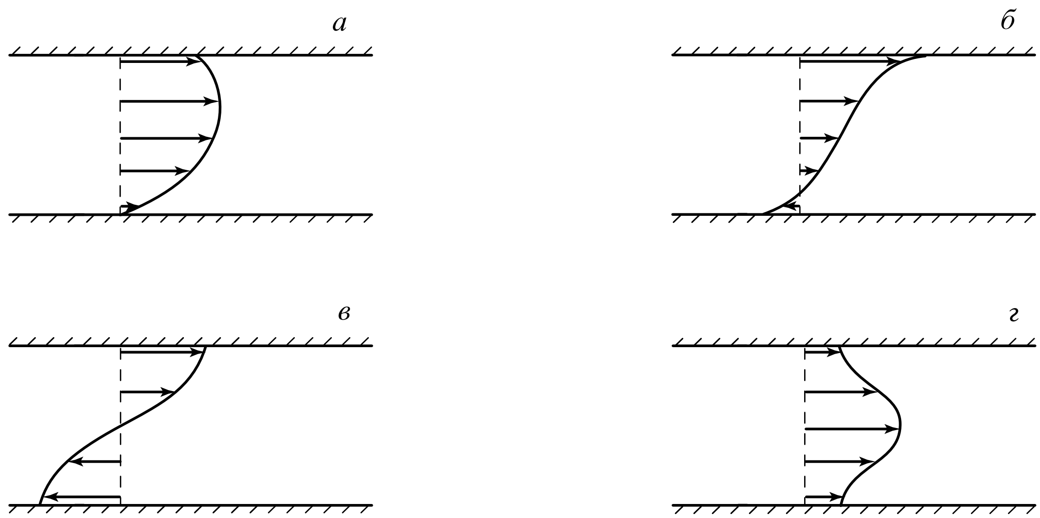

Рис. 2: Устойчивые и неустойчивые течения. (а): отсутствует точка перегиба, течение устойчиво. (б): есть точка перегиба, но условие Фьёртофта не выполнено, течение устойчиво. (в): есть точка перегиба, условие Фьёртофта выполнено, но течение устойчиво (п. 1.4). (г): есть точка перегиба, условие Фьёртофта выполнено, течение неустойчиво (п. 1.5).

1.3 Нейтральная мода

Ключевой в понимании механизма невязкой неустойчивости является нейтральная мода, фазовая скорость которой совпадает со скоростью потока в точке перегиба. Выясним некоторые важные свойства нейтральных невязких возмущений. В этом разделе будем считать, что имеется единственная невырожденная точка перегиба (т.е. $u_0'(z_s) \neq 0$), и функция

$$K(z) = -\frac{u_0''}{u_0 - u_s}$$

гладкая при всех $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$. В частности, последнее условие выполнено, если профиль скорости монотонный.

Теорема 1. Пусть $K(z) > \pi^2/(z_2 - z_1)^2$. Тогда существует нейтральная мода с $c = u_s$.

Обозначим $\lambda = -\alpha^2$ и перепишем (4) с $c = u_s$:

$$w'' + (\lambda + K(z))w = 0. \tag{8}$$

С граничными условиями (3) имеем стандартную задачу Штурма-Лиувилля. В курсах дифференциальных уравнений [1, гл. V, §22] и функционального анализа [2, гл. IX] методом сведения (8) к интегральному уравнению Фредгольма доказывается теорема Стеклова: уравнение (8) имеет счётное множество простых вещественных собственных значений λ_n, причём $|\lambda_n| \to \infty$, $n \to \infty$ (также, если $K(z) < 0$, то все $\lambda_n > 0$, однако, в нашем случае это условие не выполнено). При этом собственные функции ортогональны в L_2, а их множество полно в пространстве гладких функций на отрезке $[z_1; z_2]$. Домножим (8) на w, проинтегрируем от z_1 до z_2 и преобразуем к виду

$$\lambda \int_{z_1}^{z_2} w^2 dz = \int_{z_1}^{z_2} (w'^2 - K(z)w^2) dz$$

Пользуясь полнотой и ортогональностью собственных функций, легко доказать, что минимальное собственное значение, которое обозначим λ_s, может быть выражено так:

$$\lambda_s = \min_{w \in C^1} \frac{\int_{z_1}^{z_2} (w'^2 - K(z)w^2) dz}{\int_{z_1}^{z_2} w^2 dz} < \min_{w \in C^1} \frac{\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \left(w'^2 - \frac{\pi^2}{(z_2 - z_1)^2} w^2 \right) dz}{\int_{z_1}^{z_2} w^2 dz}.$$

Величина в правой части обращается в ноль при $w(z) = \sin(\pi(z - z_1)/(z_2 - z_1))$, следовательно,

$$\lambda_s < 0 \Rightarrow \alpha_s = \sqrt{-\lambda_s} > 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть течение неустойчиво, $K(z) > 0$. Тогда существует нейтральная мода с $c = u_s$, причём растущим модам соответствуют волновые числа $\alpha < \alpha_s$.

Для доказательства рассмотрим растущую моду и прибавим к (7) величину

$$(u_s - c_R) \int_{z_1}^{z_2} \frac{u_0''}{|u_0 - c|^2} |w|^2 dz,$$

равную нулю в силу (6). Получим:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} \left(|w'|^2 + \alpha^2|w|^2\right) dz = -\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{(u_0 + u_s - 2c_R)u_0''}{|u_0 - c|^2}|w|^2 dz =$$

$$= -\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{((u_0 - c_R)^2 - (u_s - c_R)^2)u_0''}{|u_0 - c|^2(u - u_s)}|w|^2 dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{((u_0 - c_R)^2 - (u_s - c_R)^2)}{(u_0 - c_R)^2 + c_I^2} K(z)|w|^2 dz <$$

$$< \int\limits_{z_1}^{z_2} K(z)|w|^2 dz.$$

Следовательно,

$$0 > -\alpha^2 = \lambda > \frac{\int_{z_1}^{z_2}(|w|'^2 - K(z)|w|^2)dz}{\int_{z_1}^{z_2}|w|^2 dz} > \min_{w \in C^1} \frac{\int_{z_1}^{z_2}(w'^2 - K(z)w^2)dz}{\int_{z_1}^{z_2} w^2 dz} = \lambda_s = -\alpha_s^2$$

Теорема доказана.

1.4 Контрпример достаточности условий Рэлея и Фьёртофта

Рассмотрим синусоидальный профиль скорости: $u_0(z) = \sin z$, $-\pi < z_1 \leqslant z \leqslant z_2 < \pi$ (соответствующий профиль показан на рис. 2, в). В точке $z = 0$ имеется единственная точка перегиба с $u_s = 0$. Очевидно, что условие Фьёртофта также выполнено, $K(z) \equiv 1$. Докажем, что, тем не менее, течение с этим профилем может быть устойчиво.

Предположим, что это не так, и имеется растущая мода. В силу теоремы 2 пункта 1.3 имеется и нейтральное возмущение с фазовой скоростью $c = 0$. Найдём его в явном виде. Уравнение Рэлея (4) принимает вид

$$w'' + (1 - \alpha^2)w = 0.$$

Его решения с граничными условиями (3) имеют вид $w_n(z) = \sin(\sqrt{1 - \alpha_n^2}z + \varphi_n)$,

$$\varphi_n = \frac{z_2}{z_2 - z_1}\pi n, \quad \alpha_n = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{z_2 - z_1}\right)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что вещественным может быть лишь α_1. Будем уменьшать $z_2 - z_1$, начиная с $z_2 - z_1 = 2\pi$, при этом $z_1 < 0 < z_2$. Волновое число нейтрального возмущения α_1 также будет уменьшаться. При $z_2 - z_1 = \pi$ получаем $\alpha_1 = 0$, и при $z_2 - z_1 < \pi$ нейтральное возмущение исчезает. Следовательно, течение становится устойчивым.

Противоречия с теоремой 1 пункта 1.3 нет, так как её условие нарушается при $z_2 - z_1 < \pi$.

1.5 Случаи, когда наличие точки перегиба достаточно для существования нейтрального возмущения

Построенный выше пример показывает, что наличие точки перегиба и выполнение условия Фьёртофта, вообще говоря, недостаточно для невязкой неустойчивости течения; не существует даже нейтральных мод. Однако, для многих практически важных *симметричных* течений наличие точки перегиба достаточно для существования нейтральной моды.

Рассмотрим симметричное течение и его симметричное возмущение. Пусть $z = z_3$ — ось канала. Заменим граничное условие непротекания на верхней стенке эквивалентным условием симметрии на оси канала:

$$w = 0, \quad z = z_1, \qquad \partial w/\partial z = 0, \quad z = z_3.$$

Предположим, что $u_0(z_1) < u_s < u_0(z_3)$, $K(z)$ регулярна. Покажем, что в этом случае существует симметричная нейтральная мода. Так как собственные функции определены с точностью до константы, то введём ещё условие нормировки: $w(z_3) = u_0(z_3) - u_s > 0$.

Положим $c = u_s$ и рассмотрим задачу Коши для (4) в области $z < z_3$ с условиями

$$w(z_3) = u_0(z_3) - u_s > 0, \quad \partial w(z_3)/\partial z = 0.$$

Перепишем (4) в виде

$$w'(z) = w'(z_3) + \int_z^{z_3} (K(z) - \alpha^2) w dz. \tag{9}$$

Возьмём α достаточно большим, так чтобы $K(z) - \alpha^2 < 0$ при $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$. В силу условия при $z = z_3$ получаем, что $w'(z) < 0$ при $z < z_3$. Тогда $w(z_1) > 0$.

С другой стороны, при $\alpha = 0$ решение уравнение Рэлея тривиально: $w(z) = u_0(z) - u_s$, причём $w(z_1) = u_0(z_1) - u_s < 0$.

Таким образом, $w(z_1)$ отрицательно при $\alpha = 0$ и положительно при $\alpha \to \infty$. Следовательно, существует такое $\alpha = \alpha_s$, что $w(z_1) = 0$. Другими словами, существует нейтральная мода.

К рассмотренному случаю сводятся также неограниченные симметричные течения ($z_1 \to -\infty$) и течения типа пограничного слоя ($z_3 \to +\infty$); в последнем случае условие $\partial w/\partial z = 0$ при $z = z_3$ выражает не симметрию, а затухание возмущения вдали от поверхности твёрдого тела.

Заметим, что существование нейтрального возмущения доказано для любой регулярной функции $K(z)$, в том числе когда условие Фьёртофта не выполнено, т.е. $K(z) \leqslant 0$ при $z_1 \leqslant z \leqslant z_3$. Таким образом, существуют течения, имеющие нейтральную моду, но не имеющие растущих мод. Это замечание не лишнее в свете условий теоремы следующего пункта.

Список литературы

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.