0.1 Существование растущей моды в окрестности нейтральной

Важность нейтральной моды, свойства которой были рассмотрены выше, связана с тем, что в ряде важных случаев в её окрестности существуют растущие моды, которые обеспечивают невязкую неустойчивость течения. Следующая теорема обратна теореме 2 п. **??**.

Теорема 3. Пусть существует нейтральная мода с $c = u_s$, $K(z) > 0$. Тогда в окрестности $\alpha_s - \varepsilon < \alpha < \alpha_s$ существуют растущие моды.

Факт существования собственных мод с волновыми числами и фазовыми скоростями, близкими к α_s и u_s доказывается методом возмущения нейтральной моды. А именно, рассмотрим решение уравнения Рэлея в виде

$$w(z) = w_s(z) + W_1(z)(\alpha - \alpha_s) + W_2(z)(c - u_s) + o(\alpha - \alpha_s, c - u_s),$$

$w_s(z)$ — нейтральная мода. Подстановка в (**??**) и линеаризация относительно $\alpha - \alpha_s$ и $c - c_s$ приводят к двум неоднородным уравнениям относительно W_1 и W_2:

$$W_1'' - \alpha_s^2 W_1 + K(z)W_1 = 2\alpha_s w_s,$$
$$W_2'' - \alpha_s^2 W_2 + K(z)W_2 = -\frac{K(z)}{u_0 - u_s} w_s.$$

Эти неоднородные уравнения интегрируются в квадратурах с помощью подстановки $W_j(z) = a(z)w_s(z)$, где $w_s(z)$ — решение однородного уравнения. Обозначим $q_1(z)$, $q_2(z)$ — правые части первого и второго уравнений. Тогда частные решения имеют вид

$$W_j(z) = w_s(z) \int_{z_1}^{z} \frac{1}{w_s^2(\zeta_1)} \int_{z_1}^{\zeta_1} q_j(\zeta_2) w_s(\zeta_2) d\zeta_2 \, d\zeta_1 \qquad (1)$$

Нетрудно видеть, что, хотя $w_s(z_1) = w_s(z_2) = 0$, интегралы не содержат особенности при $z = z_1, z_2$, причём $W_j(z_1) = 0$, $W_j(z_2) \neq 0$. Таким образом, граничное условие $w(z_1) = 0$ выполнено. Граничное условие $w(z_2) = 0$ приводит к уравнению

$$W_1(z_2)(\alpha - \alpha_s) + W_2(z_2)(c - u_s) + o(\alpha - \alpha_s, c - c_s) = 0, \qquad (2)$$

из которого при каждом α находится c. Существование возмущённых мод доказано.

Чтобы показать, что возмущённые моды при $\alpha < \alpha_s$ являются растущими, рассмотрим предел (2) при $\alpha \to \alpha_s$:

$$\left.\frac{dc}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_s} = -\frac{W_1(z_2)}{W_2(z_2)}.$$

Интегралы (1) для W_1 не содержат особенностей, следовательно, $W_1(z_2)$ вещественно.

Для W_2 внутренний интеграл (1) имеет логарифимическую особенность при $z = z_s$. Поскольку нас интересуют растущие возмущения, особенность должна обходиться с учётом того, что $\operatorname{Im} c > 0$ и стремится к нулю при $\alpha \to \alpha_s$. То есть в выражении для q_2, вообще говоря, нужно заменить u_s на c, $\operatorname{Im} c > 0$, и устремить c к u_s. Тогда внутренний интеграл в (1) примет вид

$$-\int_{z_1}^{\zeta_1} \frac{K(\zeta_2) w_s^2(\zeta_2)}{u_0(\zeta_2) - c} d\zeta_2$$

Рассмотрим локальное поведение подынтегрального выражения в окрестности $\zeta_2 = z_s$:

$$\frac{K w_s^2}{u_0 - c} = \frac{K w_s^2}{u_0 - u_s + (u_s - c_R) - i c_I} =$$
$$= \frac{K w_s^2}{u_s' \zeta_2 + (u_s - c_R) - i c_I} = \frac{K w_s^2}{u_s'(\zeta_2 + (u_s - c_R)/u_s' - i c_I / u_s')}$$

После интегрирования и взятия предела $c \to u_s$ получаем:

$$\operatorname{Im}\left(-\int_{z_1}^{\zeta_1} \frac{K(\zeta_2) w_s^2(\zeta_2)}{u_0(\zeta_2) - c} d\zeta_2 \right) = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-\pi K(z_s) w_s^2(z_s)}{|u_s'|} < 0, \quad \zeta_1 > z_s \\ 0 \quad \zeta_1 < z_s \end{array} \right.$$

В результате

$$\operatorname{Im} \left. \frac{dc}{d\alpha} \right|_{\alpha = \alpha_s} < 0.$$

Следовательно, если α уменьшается, то $\operatorname{Im} c$ растёт. Теорема доказана.

Замечание. Возникшая здесь логарифмическая особенность и возможность её обхода указанным естественным образом тесно связаны со способом получения собственных значений уравнения Рэлея как предела собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда при $R \to \infty$ («исчезающая вязкость»). Далее, при рассмотрении вязкой теории устойчивости, будет показано, что для растущих мод полученные собственные значения c являются пределами вязкой задачи при исчезающей вязкости. Но затухающие моды, полученные таким же способом, не являются пределами вязких решений.

Формально говоря, в доказательстве теоремы 3 можно рассмотреть затухающие моды, $c_I < 0$, тогда оказалось бы, что им тоже соответствует интервал $\alpha < \alpha_s$. Ошибочность этого результата, как было сказано, будет видна после изучения вязкой задачи.

С этим же связано частое заблуждение о том, что собственные значения уравнения Рэлея являются комплексно-сопряжёнными. Формально математически это так: если c является собственным значением, то, взяв комплексное сопряжение (**??**), можно увидеть, что и c^* также является собственным значением. Однако, только одно из этой комплексно-сопряжённой пары получается из уравнения Орра-Зоммерфельда в пределе исчезающей вязкости, и, следовательно, имеет отношение к поведению возмущений жидкости в невязком пределе. При решении «физической» задачи об устойчивости должны рассматриваться только такие собственные значения, и они уже не будут комплексно сопряжёнными.

0.2 Условия устойчивости: выводы

Доказанные выше теоремы позволяют сформулировать условия невязкой устойчивости и неустойчивости течений в терминах функции $K(z)$:

- При $K(z) < 0$ течение устойчиво.
- При $0 \leqslant K(z) \leqslant \pi^2/(z_1 - z_2)^2$ течение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Симметричные течения и течения типа пограничного слоя неустойчивы.
- При $K(z) > \pi^2/(z_1 - z_2)^2$ любое течение неустойчиво.

В случае, если $K(z)$ принимает значения из нескольких интервалов, то возможна как устойчивость, так и неустойчивость течения.

0.3 Теорема Ховарда о полукруге

В случаях, когда течение неустойчиво, часто важно знать, где именно располагаются собственные значения, соответствующие растущим модам. Это расположение даётся следующей теоремой.

Теорема Ховарда о полукруге. Пусть $u_{\max}$ и $u_{\min}$ — максимальное и минимальное значение скорости в потоке. Тогда собственные значения $c = c_R + ic_I$, $c_I > 0$ лежат в полукруге

$$\left(c_R - \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2}\right)^2 + c_I^2 \leqslant \left(\frac{u_{\max} - u_{\min}}{2}\right)^2,$$

который показан на рис. 1

Доказательство. Рассмотрим уравнение Рэлея в форме

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((u_0 - c)\frac{\partial w}{\partial z} - w\frac{\partial u_0}{\partial z}\right) - \alpha^2(u_0 - c)w = 0$$

и сделаем замену $w(z) = (u_0 - c)\varphi(z)$. Для φ получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}\left((u_0 - c)^2\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \alpha^2(u_0 - c)^2\varphi = 0.$$

Умножим его на φ^* и проинтегрируем от z_1 до z_2. Интегрируя первое слагаемое по частям, будем иметь:

$$\int_{z_1}^{z_2} (u_0 - c)^2 \underbrace{\left(|\varphi'|^2 + \alpha^2|\varphi|^2\right)}_{Q(z) \geqslant 0} dz = 0.$$

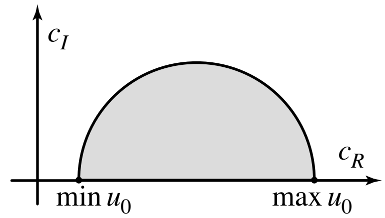

Рис. 1: Полукруг, в котором находятся собственные значения c растущих мод согласно теореме Ховарда.

Рассмотрим мнимую часть этого равенства:

$$2c_I \int_{z_1}^{z_2} (u_0 - c_R) Q dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{z_1}^{z_2} u_0 Q dz = \int_{z_1}^{z_2} c_R Q dz \tag{3}$$

Отсюда, в частности, следует, что $u_{\min} \leqslant c_R \leqslant u_{\max}$. Далее, рассмотрим вещественную часть с учётом (3):

$$\int_{z_1}^{z_2} ((u_0 - c_R)^2 - c_I^2) Q dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{z_1}^{z_2} u_0^2 Q dz = \int_{z_1}^{z_2} (c_R^2 + c_I^2) Q dz$$

С учётом полученных соотношений рассмотрим неравенство

$$0 \geqslant \int_{z_1}^{z_2} (u_0 - u_{\min})(u_0 - u_{\max}) Q dz = \int_{z_1}^{z_2} (c_R^2 + c_I^2 - (u_{\min} + u_{\max}) c_R + u_{\min} u_{\max}) Q dz$$
$$\Downarrow$$
$$c_R^2 + c_I^2 - (u_{\min} + u_{\max}) c_R + u_{\min} u_{\max} \leqslant 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

0.4 Уравнение Рэлея в окрестности критической точки. Регулярное и сингулярное решения

Выше изучалось нейтральное возмущение с фазовой скоростью $c = u_s$. При таком c уравнение Рэлея можно разделить на $u_0 - c$, и оно становится регулярным при регулярной функции $K(z)$; следовательно, и решение $w(z)$ регулярно. Пусть теперь $c \neq u_s$. Обозначим z_c точку, где $u_0(z_c) = c$, эту точку будем называть критической точкой. Если c вещественно и где-либо совпадает со скоростью течения, то $z_1 < z_c < z_2$. В противном случае z_c комплексно (считая $u_0(z)$ аналитической функцией, её можно с вещественной оси продолжить в комплексную плоскость z и рассматривать комплексные решения уравнения $u_0(z) = c$). В окрестности $z = z_c$ уравнение Рэлея сингулярно: коэффициент при старшей производной обращается в ноль. Рассмотрим поведение его решений в окрестности критической точки; оно, помимо самостоятельного интереса, будет использоваться при построении вязкой теории устойчивости.

Запишем уравнение Рэлея в виде

$$(u_0 - c)w'' - p(z)w = 0, \quad p(z) = \alpha^2(u_0 - c) + u_0'' \tag{4}$$

и разложим функции u_0 и w в ряд Тейлора в окрестности $z = z_c$, считая, что все функции аналитические, $u_0'(z_c) \neq 0$, $u_0''(z_c) \neq 0$. Обозначим $\zeta = z - z_c$, тогда

$$u_0(\zeta) = c + u_{01}\zeta + \frac{u_{02}\zeta^2}{2} + \ldots, \quad w(\zeta) = w_0 + w_1\zeta + \frac{w_2\zeta^2}{2} + \frac{w_3\zeta^3}{6} + \ldots, \quad p(\zeta) = p_0 + p_1\zeta + \ldots$$

Поставим эти разложения в (4) и соберём коэффициенты при одинаковых степенях ζ. Поскольку w — решение уравнения, каждый коэффициент должен быть равен нулю. Получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\zeta^0: &\quad p_0 w_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_0 = 0,\\
\zeta^1: &\quad u_{01}w_2 - p_0 w_1 = 0,\\
\zeta^2: &\quad u_{01}w_3 + u_{02}w_2/2 - p_0 w_2/2 - p_1 w_1 = 0,
\end{aligned}$$

и так далее. Первое равенство даёт $w_0 = 0$, второе и все последующие линейно выражают w_n, $n > 1$ через w_1, которое может быть выбрано произвольно. Таким образом, получаем единственное аналитическое решение

$$w_r(z) = (z - z_c)P(z),$$

где $P(z)$ — аналитическая функция, $P(z_c) \neq 0$. Это решение будем называть регулярным решением.

Для отыскания второго линейно-независимого решения (которое, очевидно, не будет аналитическим) сделаем замену $w(\zeta) = f(\zeta)w_r(\zeta)$ и подставим в (4):

$$(u_0 - c)(f''w_r + 2f'w_r') = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f''}{f'} = -\frac{2}{\zeta}\frac{P_1(\zeta)}{P(\zeta)} = -\frac{2}{\zeta}(1 + q_1\zeta + q_2\zeta^2 + \ldots).$$

Интегрируя, последовательно получаем:

$$\ln f'(\zeta) = -2(\ln\zeta + q_1\zeta + q_2\zeta^2/2 + \ldots) + C_1,$$

$$f'(\zeta) = \tilde{C}_1\frac{1}{\zeta^2}(\tilde{q}_0 + \tilde{q}_1\zeta + \tilde{q}_2\zeta^2 + \ldots) = \tilde{C}_1\left(\frac{\tilde{q}_0}{\zeta^2} + \frac{\tilde{q}_1}{\zeta} + \tilde{q}_2 + \tilde{q}_3 z + \ldots\right),$$

$$f(\zeta) = \tilde{C}_1\left(-\frac{\tilde{q}_0}{\zeta} + \tilde{q}_1\ln\zeta + \tilde{q}_2\zeta + \tilde{q}_3\frac{z^2}{2} + \ldots\right) + \tilde{C}_2,$$

Выбирая произвольные постоянные $\tilde{C}_1 = 1/\tilde{q}_1$, $\tilde{C}_2 = 0$ и возвращаясь от f к w, находим второе решение уравнения Рэлея

$$w_s(z) = (z - z_c)\ln(z - z_c)P(z) + Q(z),$$

называемое сингулярным решением; здесь $Q(z)$ — аналитическая функция, $Q(z_c) \neq 0$.

Получаем, что сингулярность уравнения Рэлея в критической точке приводит к тому, что имеются два линейно-независимых решения: регулярное решение, обращающееся в критической точке в ноль, и сингулярное, имеющее логарифмическую особенность, которое в критической точке отлично от нуля. Заметим, что эта особенность уже встречалась ранее при доказательстве теоремы 3. Поскольку критическая точка является для $w_s(z)$ точкой ветвления, то имеется неопределённость продолжение сингулярного решения уравнения Рэлея. В частности, если критическая точка находится на вещественной оси, то, обходя критическую точку с выходом в комплексную плоскость в области $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, после возврата на вещественную ось будем получать разные продолжения решения. Эта дилемма не может быть разрешена в рамках невязкого приближения, поскольку точка ветвления вызвана сингулярностью уравнения Рэлея.

Выходом из этой ситуации является изучение уравнения Орра-Зоммерфельда, которое при всех R регулярно, при $R \to \infty$, т.е. в пределе исчезающей вязкости. Это даст дополнительное правило обхода особенности, которое будет получено далее.