1 Вязкая теория устойчивости

В этой части курса изучается уравнение Орра-Зоммерфельда, описывающее возмущения в виде бегущих волн в вязкой жидкости:

$$\frac{1}{iR\alpha}\left(\frac{d^4w}{dz^4} - 2\alpha^2\frac{d^2w}{dz^2} + \alpha^4 w\right) = \frac{d}{dz}\left((u_0 - c)\frac{dw}{dz} - w\frac{du_0}{dz}\right) - \alpha^2(u_0 - c)w. \qquad (1)$$

Граничные условия прилипания на твёрдых стенках имеют вид

$$w = \frac{dw}{dz} = 0, \quad z = z_1, z_2.$$

С этими граничными условиями уравнение Орра-Зоммерфельда определяет задачу на собственные значения c. Как следует из результатов разд. **??**, система собственных мод вязкой жидкости полна, поэтому произвольное возмущение можно представить в виде их суперпозиции. Следовательно, устойчивость произвольного возмущения определяется устойчивостью собственных мод.

1.1 Возмущения при малых числах Рейнольдса

Разложим собственное значение c и собственную моду в ряд по степеням $iR\alpha$. Причём, поскольку левая часть (1) содержит $(iR\alpha)^{-1}$, разложение c тоже начнём с (-1)-й степени:

$$c = \frac{1}{iR\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(iR\alpha)^n c_n, \quad w(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(iR\alpha)^n w_n(z). \qquad (2)$$

Подставим в (1) и рассмотрим 1-е приближение:

$$\frac{d^4w_0}{dz^4} - (2\alpha^2 - c_0)\frac{d^2w_0}{dz^2} + (\alpha^4 - \alpha^2 c_0)w_0 = 0.$$

Заметим, что это уравнение не зависит от профиля скорости; таким образом, при очень малых числах Рейнольдса главное влияние на характеристики устойчивости оказывает вязкость, независимо от вида течения. Получилось уравнение с постоянными коэффициентами, решения которого — экспоненты $e^{\lambda z}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - (\alpha^2 + \alpha^2 - c_0)\lambda^2 + \alpha^2(\alpha^2 - c_0) = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - (\alpha^2 - c_0)) = 0.$$

Введём вместо c_0 параметр p: $c_0 = \alpha^2 + p^2$. Кроме того, для удобства сместим ось z так, что $z_1 = -L$, $z_2 = L$, где L — удвоенная ширина канала. Тогда, комбинируя из экспонент тригонометрические и гиперболические функции, находим общее решение:

$$w_0 = C_1 \operatorname{ch}\alpha z + C_2 \cos pz + C_3 \operatorname{sh}\alpha z + C_4 \sin pz.$$

Подставим граничные условия при $z = \pm L$. Получим однородную систему линейных уравнений для C_j. Она имеет ненулевые решения при

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \alpha L & \cos pL & \operatorname{sh} \alpha L & \sin pL \\ \operatorname{ch} \alpha L & \cos pL & -\operatorname{sh} \alpha L & -\sin pL \\ \alpha \operatorname{sh} \alpha L & -p \sin pL & \alpha \operatorname{ch} \alpha L & p \cos pL \\ -\alpha \operatorname{sh} \alpha L & p \sin pL & \alpha \operatorname{ch} \alpha L & p \cos pL \end{pmatrix} = 0.$$

Преобразуем определитель: к первой строке прибавим вторую, затем из третьей вычтем четвёртую и поменяем её местами со второй:

$$\det \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \alpha L & \cos pL & 0 & 0 \\ \alpha \operatorname{sh} \alpha L & -p \sin pL & 0 & 0 \\ \operatorname{ch} \alpha L & \cos pL & -\operatorname{sh} \alpha L & -\sin pL \\ -\alpha \operatorname{sh} \alpha L & p \sin pL & \alpha \operatorname{ch} \alpha L & p \cos pL \end{pmatrix} = 0.$$

Этот определитель очевидным образом разлагается на произведение двух определителей матриц 2-го порядка. Они соответствуют чётным ($C_3 = C_4 = 0$) и нечётным ($C_1 = C_2 = 0$) возмущениям. Уравнения на собственные значения принимают вид, соответственно, для чётных и нечётных возмущений

$$p \operatorname{tg} pL = -\alpha \operatorname{th} \alpha L \qquad \text{и} \qquad p \operatorname{ctg} pL = \alpha \operatorname{cth} \alpha L.$$

Каждое уравнение имеет счётное число вещественных решений $p_m^{\text{ч}}(\alpha)$ и $p_m^{\text{н}}(\alpha)$. При $\alpha \to 0$ правая часть уравнения для чётных возмущений стремится к нулю, для нечётных — к $1/L$. Тогда

$$p_m^{\text{ч}}(0) = \frac{\pi m}{L}, \ m \in \mathbb{N},$$

$$p_1^{\text{н}}(0) \approx \frac{4.49}{L}, \ p_2^{\text{н}}(0) \approx \frac{7.73}{L}, \ p_3^{\text{н}}(0) \approx \frac{10.90}{L}, \ p_m^{\text{н}}(0) \to \frac{\pi(2m+1)}{2L} \text{ при } m \to \infty$$

Таким образом, найдено 1-е приближение к c при малых числах Рейнольдса:

$$c(\alpha, R) \sim \frac{\alpha^2 + p^2(\alpha)}{iR\alpha}, \ R \to 0$$

Как видно, все возмущения экспоненциально быстро затухают, причём, поскольку в первом приближении $\operatorname{Re} c = 0$, то все волны в жидкости являются стоячими. При малых R течение устойчиво. Рассматривая следующие приближения к c, можно доказать, что ряд (2) сходится в некоторой окрестности $R = 0$, однако это технически непросто, и для целей исследования устойчивости не нужно, поэтому ограничимся рассмотренным 1-м приближением.

1.2 Достаточные условия устойчивости

Поскольку при малых R все возмущения, независимо от течения, затухают, причём со скоростью, пропорциональной $1/R$, возникает естественное желание получить априорную верхнюю оценку числа Рейнольдса, при котором течение остаётся устойчивым. Такие оценки можно получить, применяя интегральные соотношения. Перепишем уравнение Орра-Зоммерфельда в виде

$$\frac{d^4w}{dz^4}-2\alpha^2\frac{d^2w}{dz^2}+\alpha^4w=iR\alpha\left(u_0\frac{d^2w}{dz^2}-\frac{d^2u_0}{dz^2}w-\alpha^2u_0w\right)-iR\alpha c\left(\frac{d^2w}{dz^2}-\alpha^2w\right),$$

домножим его на комплексно-сопряжённую функцию w^* и проинтегрируем от z_1 до z_2. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия, получим:

$$I_2^2+2\alpha^2I_1^2+\alpha^4I_0^2=-iR\alpha J-iR\alpha\int_{z_1}^{z_2}u_0'w'w^*dz+iR\alpha c(I_1^2+\alpha^2I_0^2), \tag{3}$$

где

$$I_2^2=\int_{z_1}^{z_2}\left|\frac{d^2w}{dz^2}\right|^2dz,\quad I_1^2=\int_{z_1}^{z_2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2dz,\quad I_0^2=\int_{z_1}^{z_2}|w|^2\,dz,$$
$$J=\int_{z_1}^{z_2}\left(u_0\left|\frac{dw}{dz}\right|^2+\left(\frac{d^2u_0}{dz^2}+\alpha^2u_0\right)|w|^2\right)dz,$$

Взяв вещественную часть (3), получаем:

$$\operatorname{Im}c=\frac{1}{I_1^2+\alpha^2I_0^2}\left(\operatorname{Im}\int_{z_1}^{z_2}u_0'w'w^*dz-\frac{I_2^2+2\alpha^2I_1^2+\alpha^4I_0^2}{R\alpha}\right) \tag{4}$$

Оценим первое слагаемое в скобках:

$$\left|\operatorname{Im}\int_{z_1}^{z_2}u_0'w'w^*dz\right|\leqslant\int_{z_1}^{z_2}|u_0'||w'||w|dz\leqslant q\int_{z_1}^{z_2}|w'||w|dz\leqslant qI_1I_0.$$

Здесь $q=\max_{z_1\leqslant z\leqslant z_2}|u_0'|$. Последнее неравенство — неравенство Коши-Буняковского в пространстве L_2. Таким образом, получаем верхнюю оценку скорости роста возмущения:

$$\alpha\operatorname{Im}c\leqslant\frac{q\alpha I_1I_0}{I_1^2+\alpha^2I_0^2}-\frac{1}{R}\frac{I_2^2+2\alpha^2I_1^2+\alpha^4I_0^2}{I_1^2+\alpha^2I_0^2}$$

Для устойчивости достаточно, чтобы правая часть была неположительна. Учитывая, что $\alpha I_1I_0\leqslant(I_1^2+\alpha^2I_0^2)/2$, получаем оценку чисел Рейнольдса, при которых течение устойчиво:

$$R\leqslant R^*=\frac{2}{q}\min_{w,\alpha}\frac{I_2^2+2\alpha^2I_1^2+\alpha^4I_0^2}{I_1^2+\alpha^2I_0^2}.$$

Минимум должен браться по функциям, удовлетворяющим граничным условиям.

Остановимся на вычислении этого минимума. Для этого удобно выбрать начало координат по оси z так, что $z_1 = 0$, $z_2 = 2L$. Поскольку функции должны быть равны нулю при $z = 0, 2L$, их можно разложить в ряд Фурье по синусам:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2L}\right)$$

Приравнивая нулю производные при $z = 0, 2L$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin\left(\frac{n\pi}{2L}\right) = 0$$

Складывая и вычитая почленно эти ряды, приходим к эквивалентным условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \sin\left(\frac{2k\pi}{2L}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\right) = 0 \qquad (5)$$

Вычислим I_0^2, I_1^2, I_2^2:

$$I_0^2 = L\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2, \quad I_1^2 = L\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2, \quad I_2^2 = L\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \left(\frac{n\pi}{2L}\right)^4.$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{I_2^2 + 2\alpha^2 I_1^2 + \alpha^4 I_0^2}{I_1^2 + \alpha^2 I_0^2} = \frac{I_2^2 + \alpha^2 I_1^2}{I_1^2 + \alpha^2 I_0^2} + \alpha^2 = \frac{\pi^2}{(2L)^2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left((n\pi)^2 + (2L\alpha)^2\right) n^2 |a_n|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \left((n\pi)^2 + (2L\alpha)^2\right) |a_n|^2} + \alpha^2.$$

Нетрудно видеть, что для достижения минимума следует брать наименьшее число ненулевых членов ряда, удовлетворяя при этом граничным условиям (5). Выгоднее всего взять все чётные a_n нулевыми, а из нечётных ненулевыми взять наименьшее число — два члена a_1 и a_3, причём из (5) $a_3 = -a_1/3$. В результате минимум по a_n (то есть по функциям w, удовлетворяющим граничным условиям) будет равен

$$\frac{\pi^2}{(2L)^2} \frac{5\pi^2 + (2L\alpha)^2}{\pi^2 + 5(2L\alpha)^2/9} + \alpha^2 = \frac{1}{(2L)^2}\left(\pi^2 \frac{5\pi^2 + s}{\pi^2 + 5s/9} + s\right),$$

где $s = (2L\alpha)^2$. Минимум выражения в скобках достигается при $s = 3\pi^2/5$ и равен $24\pi^2/5$. Таким образом, окончательно получаем достаточное условие устойчивости:

$$R \leqslant R^* = \frac{48\pi^2}{5q} \frac{1}{(z_2 - z_1)^2}.$$

Рассмотрим примеры. В случае течения Куэтта $u_0(z) = z$ в канале $0 \leqslant z \leqslant 1$ имеем: $q = 1$, откуда $R^* = 48\pi^2/5 \approx 94.7$. В случае течения Пуазейля в таком же канале $u_0(z) = 4z(z-1)$, откуда $q = 4$, и $R^* = 12\pi^2/5 \approx 23.7$. В обоих случаях число Рейнольдса построено по максимальной скорости потока и полной ширине канала.