0.1 Возмущения при больших числах Рейнольдса

Метод интегральных соотношений позволяет определить часть области устойчивости, фактически не решая задачу на собственные значения, а пользуясь лишь некоторыми общими соотношениями. При этом число R^*, как показывают конкретные примеры, составляет несколько десятков, то есть довольно велико. Дальнейшее улучшение этих априорных оценок возможно при более аккуратном поиске минимума правой части (**??**). Нас, однако, дальше будет интересовать точная граница устойчивости и структура собственных мод. Они не могут быть найдены априорными оценками и требуют решения задачи на собственные значения.

0.1.1 Решения вне окрестности точки поворота

В случае больших чисел Рейнольдса уравнение Орра-Зоммерфельда имеет при старшей производной малый параметр $1/R$. Это уравнение, с точки зрения теории дифференциальных уравнений, является сингулярным возмущением уравнения Рэлея. Общий способ решения таких уравнений был разработан к середине XX-го века в квантовой механике, где основное уравнение — уравнение Шредингера — имеет при старшей производной малый параметр — постоянную Планка. Этот способ носит название метода ВКБ, названным по первым буквам фамилий физиков Вентцеля, Крамерса и Бриллюэна (в англоязычной литературе, наряду с WKB, иногда используется сокращение WKBJ, где «J» — первая буква фамилии математика Джеффрис). Рассмотрим сначала некоторые наводящие примеры, иллюстрирующие основную идею этого метода.

Пусть имеется сингулярно возмущённый многочлен

$$R(x) = \varepsilon P(x) + Q(x),$$

причём $\deg P(x) = n$, $\deg Q(x) = m$, $n > m$. Обозначим λ_j, $j = 1, ..., m$ — корни $Q(x)$; $\mu_j(\varepsilon)$, $j = 1, ..., n$ — корни $R(x)$. При $\varepsilon \to 0$ часть нулей $\mu_j(\varepsilon) \to \lambda_j$, $j = 1, ..., m$, что можно легко доказать методом возмущений. Но, поскольку $m < n$, остаётся $n - m$ нулей $R(x)$, которые к нулям $Q(x)$ не стремятся. Ни к каким конечным числам они также не могут стремиться. Легко понять, что разложение многочлена $R(x)$ на множители имеет вид

$$\begin{aligned} R(x) = C(x - \mu_1(\varepsilon)) \cdot (x - \mu_2(\varepsilon)) \cdot ... \cdot (x - \mu_m(\varepsilon)) \cdot \\ \cdot (\varepsilon^{p_{m+1}} x - q_{m+1}(\varepsilon)) \cdot (\varepsilon^{p_{m+2}} x - q_{m+2}(\varepsilon)) \cdot ... \cdot (\varepsilon^{p_n} x - q_n(\varepsilon)), \end{aligned}$$

причём $q_k(\varepsilon)$ стремятся к конечным числам при $\varepsilon \to 0$. Степени p_k определяются перемножением множителей и применением метода неопределённых коэффициентов. Таким образом, нули $R(x)$, не стремящиеся к нулям $Q(x)$, стремятся к бесконечности в виде $q_k(\varepsilon)/\varepsilon^{p_k}$. В качестве примера рассмотрим многочлен

$$\varepsilon x^2 + 2ax + b.$$

Его нули даются формулами

$$x_1(\varepsilon) = \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon b} - a}{\varepsilon}, \quad x_2(\varepsilon) = \frac{-\sqrt{a^2 - \varepsilon b} - a}{\varepsilon}.$$

Раскладывая $x_1(\varepsilon)$ по формуле Тейлора, легко убедиться, что при $\varepsilon \to 0$ корень $x_1(\varepsilon)$ стремится к $-b/(2a)$ — решению вырожденного линейного уравнения при $\varepsilon = 0$. В то же время, второй корень $x_2 \sim -2a/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть теперь имеется сингулярно возмущённое обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\varepsilon \left(a_n \frac{d^n f}{dz^n} + ... + a_1 \frac{df}{dz} + a_0 f \right) + \left(b_m \frac{d^m f}{dz^m} + ... + b_1 \frac{df}{dz} + b_0 f \right) = 0, \quad n > m.$$

Его характеристический многочлен является сингулярно возмущённым. Поэтому общее решение уравнения при малых ε имеет вид

$$f(z) = C_1 \exp(\mu_1(\varepsilon) z) + C_2 \exp(\mu_2(\varepsilon) z) + ... + C_m \exp(\mu_m(\varepsilon) z) + \\ + C_{m+1} \exp\left(\frac{q_{m+1}(\varepsilon) z}{\varepsilon^{p_{m+1}}}\right) + C_{m+2} \exp\left(\frac{q_{m+2}(\varepsilon) z}{\varepsilon^{p_{m+2}}}\right) + ... + C_n \exp\left(\frac{q_n(\varepsilon) z}{\varepsilon^{p_n}}\right).$$

Первые m экспонент близки к решениям уравнения при $\varepsilon = 0$. Оставшиеся $n - m$ экспонент при малых ε — быстро растущие или затухающие ($\operatorname{Im} q_j = 0$), или, кроме того, быстро осциллирующие ($\operatorname{Im} q_j \neq 0$) функции. Таким образом, сингулярное возмущение дифференциального уравнения приводит к появлению новых линейно-независимых решений, которые при малых ε быстро меняются — или монотонно, или при этом быстро осциллируя.

Вид «новых» линейно-независимых решений, возникающих из-за повышения порядка уравнения при его возмущении малым параметром в случае постоянных коэффициентов подсказывает вид решения в случае уравнения с переменными коэффициентами. Рассмотрим уравнение Орра-Зоммерфельда

$$\varepsilon \left(\frac{d^4 w}{dz^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \alpha^4 w \right) = \frac{d}{dz} \left((u_0 - c) \frac{dw}{dz} - w \frac{du_0}{dz} \right) - \alpha^2 (u_0 - c) w, \tag{1}$$

где $\varepsilon = (iR\alpha)^{-1}$. Два его линейно-независимых решения $w_{1,2}(z, \varepsilon)$ при малых ε близки к решениям уравнения Рэлея, которые можно взять в виде регулярного и сингулярного решений в окрестности точки поворота (разд. **??**):

$$w_1(z, 0) = (u_0(z) - c) P(z), \\ w_2(z, 0) = (u_0(z) - c) \ln(u_0(z) - c) P(z) + Q(z).$$

Другие два решения, по аналогии с решениями уравнения с постоянными коэффициентами, будем искать в виде

$$w(z, \varepsilon) = f(z, \varepsilon) \exp\left(\frac{q(z, \varepsilon)}{\varepsilon^p}\right), \tag{2}$$

полагая функции $f(z,\varepsilon)$ и $q(z,\varepsilon)$ аналитическими функциями ε в окрестности $\varepsilon = 0$. Вычислим производные (2):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 w(z,\varepsilon)}{dz^2} &= \left(f'' + \frac{2f'q' + fq''}{\varepsilon^p} + \frac{fq'^2}{\varepsilon^{2p}}\right)\exp\left(\frac{q(z,\varepsilon)}{\varepsilon^p}\right),\\
\frac{d^4 w(z,\varepsilon)}{dz^4} &= \left(f'''' + \frac{4f'''q' + 6f''q'' + 4f'q''' + fq''''}{\varepsilon^p} + \right.\\
&\left. + \frac{6f''q'^2 + 12f'q'q'' + 4fq'q''' + 3fq''^2}{\varepsilon^{2p}} + \frac{4f'q'^3 + 6fq'^2q''}{\varepsilon^{3p}} + \frac{fq'^4}{\varepsilon^{4p}}\right)\exp\left(\frac{q(z,\varepsilon)}{\varepsilon^p}\right),
\end{aligned} \tag{3}$$

штрихи означают производные по z. Подставив эти выражения в (1), видно, что для получения нетривиальных соотношений нужно положить $p = 1/2$. Разложим $f(z,\varepsilon)$ и $q(z,\varepsilon)$ в ряды

$$f(z,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\varepsilon^n, \qquad q(z,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z)\varepsilon^n, \tag{4}$$

Подстановка этих рядов в уравнение (1) с подставленными выражениями (3) приводит к следующему: члены порядка ε^{-1} и $\varepsilon^{-1/2}$ содержат только функции $f_0(z)$, $q_0(z)$. Члены порядков ε^0, $\varepsilon^{1/2}$, и так далее, содержат следующие члены разложений f и q. Мы ограничимся первыми членами разложения, которые при малых ε являются главными. Соотношение при ε^{-1} имеет вид:

$$f_0 q_0'^4 = (u_0 - c) f_0 q_0'^2 \quad \Rightarrow \quad q_0' = \sqrt{u_0 - c} \quad \Rightarrow \quad q_0 = \int_{z_c}^{z} \sqrt{u_0(z) - c}\, dz.$$

Соотношение при $\varepsilon^{-1/2}$ даёт:

$$2f_0' q_0'^3 + 6 f_0' q_0'^2 q_0'' = (u_0 - c)(2f_0' q_0' + f_0 q_0'') = 2 f_0' q_0'^4 + f_0 q_0'^2 q_0'' \;\Rightarrow\; f_0 = \frac{A}{q_0'^{5/2}} = \frac{A}{(u_0 - c)^{5/4}}$$

Соотношения при следующих степенях приводят к выражениям для f_n и q_n с $n > 0$. Таким образом, с точностью до первых членов разложений f и q, приходим к решениям

$$\begin{aligned}
w_{3,4}(z,\varepsilon) &= \frac{A}{(u_0 - c)^{5/4}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{z_c}^{z} \sqrt{u_0(z) - c}\, dz\right) = \\
&= \frac{A}{(u_0 - c)^{5/4}} \exp\left(e^{i\pi/4} \sqrt{R\alpha} \int_{z_c}^{z} \sqrt{u_0(z) - c}\, dz\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что это выражение даёт два решения, поскольку ветвь квадратного корня в экспоненте можно выбрать двумя способами.

Полученные решения (5) называются ВКБ-решениями, или решениями типа ВКБ. Как и в случае уравнений с постоянными коэффициентами, они имеют вид быстро меняющихся функций. Однако, во-первых, теперь амплитуда f и фаза q зависят от коэффициентов уравнения. Во-вторых, (5) лишь локально приближают решения (1), поскольку ряды (4) сходятся не во всей комплексной плоскости z. Ясно, что (5) неприменимо в окрестности точки z_c, где подынтегральное выражение в показателе экспоненты обращается в ноль и имеет точку ветвления. Такие точки z, где $q'(z,\varepsilon)$ имеет точку ветвления, в теории ВКБ называются точками поворота (смысл названия будет ясен позднее). Таким образом, $z = z_c$ — точка поворота.

Рассмотрим на комплексной плоскости z кривые $\operatorname{Re} q(z,\varepsilon) = 0$, называемые линиями Стокса (иногда в литературе такие линии называются линиями анти-Стокса, а линии Стокса — кривые $\operatorname{Im} q(z,\varepsilon) = 0$). Эти линии проходят через точку поворота и делят комплексную плоскость z на области, в которых $\operatorname{Re} q(z,\varepsilon)$ сохраняет знак. Исследуем, как эти линии выглядят в окрестности точки поворота. Введём, как обычно, локальную переменную $\zeta = z - z_c$, тогда $u_0(z) - c \approx u_0'\zeta$. Имеем:

$$e^{i\pi/4}\sqrt{R\alpha}\int_{z_c}^{z}\sqrt{u_0(z)-c}\,dz = e^{i\pi/4}\sqrt{u_0'R\alpha}\int_0^{\zeta}\sqrt{\eta}\,d\eta = e^{i\pi/4}\sqrt{u_0'R\alpha}\frac{2}{3}\zeta^{3/2}.$$

Эта величина на линиях Стокса чисто мнимая, т.е. равна $re^{i\pi/2+\pi n}$, где $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$. Пусть для простоты точка поворота вещественная, и $u_0'(z_c) > 0$. Тогда получаем:

$$e^{i\pi/4}\sqrt{u_0'R\alpha}\frac{2}{3}\zeta^{3/2} = re^{i\pi/2+\pi n} \quad \Rightarrow \quad \zeta^{3/2} = re^{i\pi/4+\pi n} \quad \Rightarrow \quad \zeta = re^{i\pi/6+2\pi n/3}.$$

Это уравнение даёт три прямые, выходящие из точки поворота, угол между которыми — 120° (рис. 1). Если точка поворота в комплексной плоскости единственна, то линии Стокса разбивают её на три области. При стремлении z к бесконечности внутри каждой из этих областей, или при $R \to \infty$ и фиксированном z одно из ВКБ-решений (5) затухает, другое — экспоненциально быстро растёт. Первое решение называется рецессивным в данной области, второе — доминантным. Пусть канал, в котором течёт жидкость, неограничен: $z_2 = +\infty$ (например, течение имеет вид пограничного слоя). Тогда при $z \to +\infty$ ставится условие затухания возмущений. Это означает, что в области комплексной плоскости z, содержащей положительное направление вещественной оси (область 1 на рис. 1), в силу граничного условия должно выбираться рецессивное решение.

Изучим продолжение решений в соседние области. При пересечении линии Стокса (то есть при переходе в соседнюю область) решение, которое было рецессивным, становится доминантным, а решение, бывшее доминантным, становится рецессивным. Однако, это порождает неоднозначность решения: при полном обходе точки поворота получается, что после возврата в исходную область доминантное решение стало в ней же рецессивным, и наоборот. Также неоднозначно продолжение решений из области 1 в область 3, содержащей второе граничное условие при $z = z_1$, при обходе точки поворота снизу и сверху (рис. 1). Между тем, уравнение Орра-Зоммерфельда не

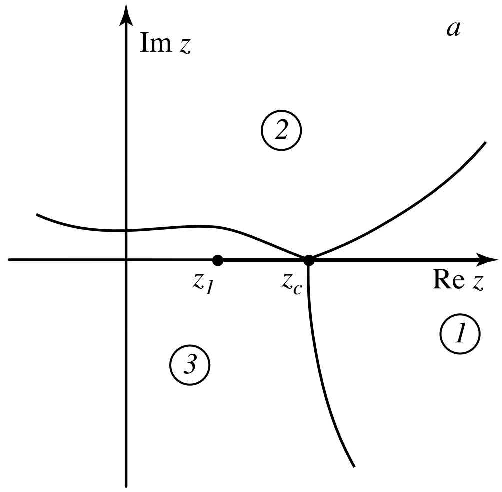

Рис. 1: Линии Стокса в комплексной плоскости z в случае единственной вещественной точки поворота, $u_0'(z_c) > 0$. Интервал вещественной оси $z \geqslant z_1$ — физическая область течения. В области 1, включающей интервал вещественной оси $z \geqslant z_c$, выбирается рецессивное решение. Продолжение решения в область 3, содержащую интервал вещественной оси $z_1 \geqslant z \geqslant z_c$, при обходе точки поворота сверху (через область 2) и снизу в рамках приближения ВКБ неоднозначно.

содержит сингулярностей, и его решения должны быть однозначны. Эта неоднозначность показывает, что ВКБ-приближения верны лишь локально в каждой области, но не всегда могут быть продолжены в соседние области — этому должна препятствовать сходимость рядов (4).

Для изучения «правильного» продолжения решений ВКБ в соседние области необходимо рассмотреть структуру решений уравнения в окрестности точки поворота, что будет сделано далее.